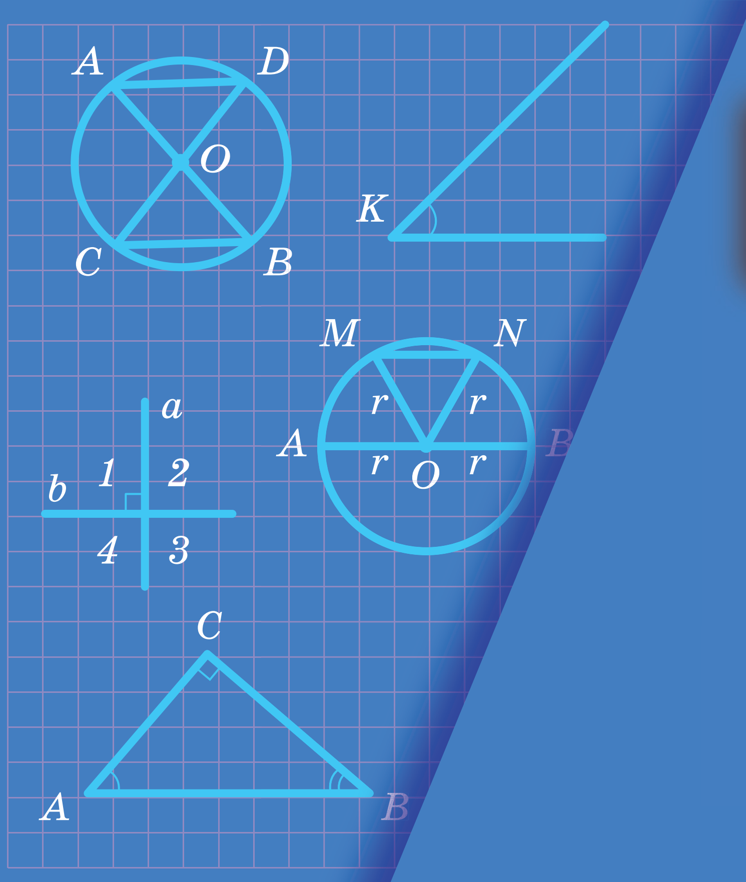
Генеза

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

Олександр Істер

ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТИНА 2



7

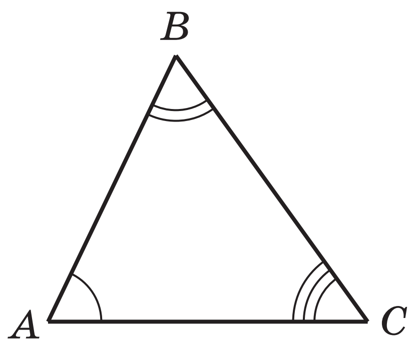
ТРИКУТНИК

$P = AB + BC + CA$

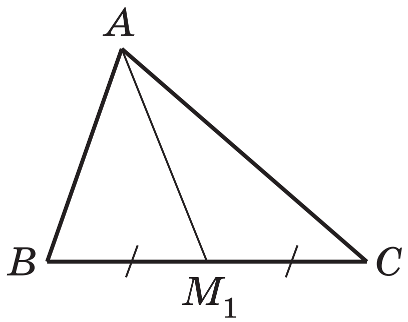
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$|AB - BC| < AC < AB + BC$

(нерівність трикутника)

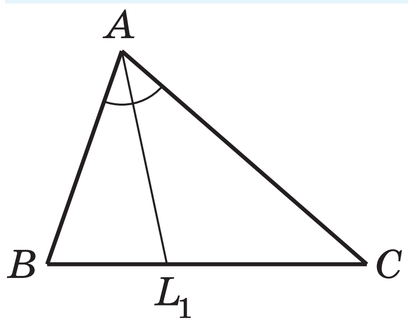


МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА І ВИСОТА ТРИКУТНИКА



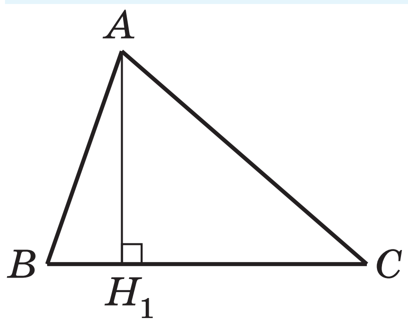
$BM_1 = M_1C$

AM_1 – медіана $\triangle ABC$



$\angle BAL_1 = \angle CAL_1$

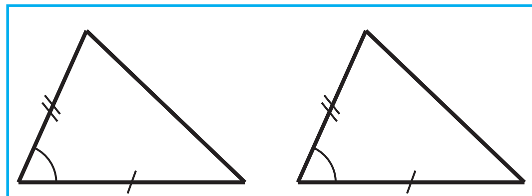
AL_1 – бісектриса $\triangle ABC$



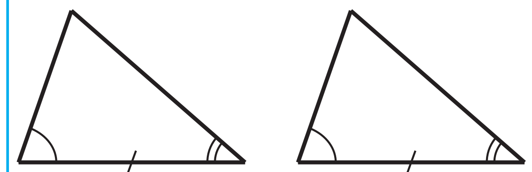
$AH_1 \perp BC$

AH_1 – висота $\triangle ABC$

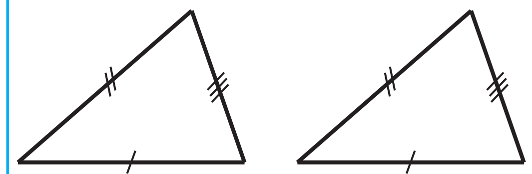
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



1. За двома сторонами і кутом між ними



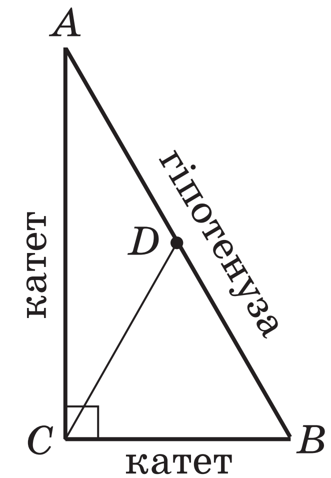
2. За стороною і прилеглими до неї кутами



3. За трьома сторонами

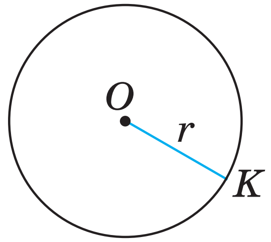
ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

1. $\angle A + \angle B = 90^\circ$
2. $AB > AC$, $AB > BC$
3. Якщо $\angle A = 30^\circ$, то $BC = \dfrac{AB}{2}$
4. Якщо $BC = \dfrac{AB}{2}$, то $\angle A = 30^\circ$
5. Якщо CD – медіана, то $CD = \dfrac{AB}{2}$



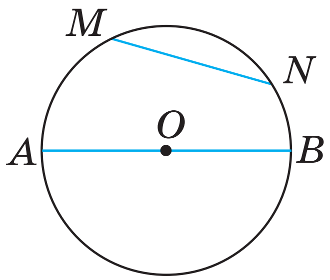
КОЛО

Колом **називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки.**



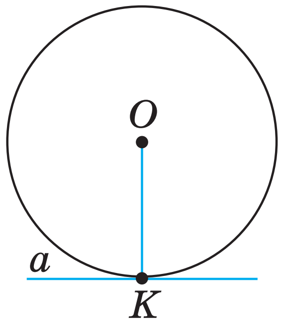
Цю точку називають *центром* кола. Відрізок, що сполучає центр з будь-якою точкою кола, називають ***радіусом***.

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають ***хордою***. Хорду, що проходить через центр кола, називають ***діаметром***.

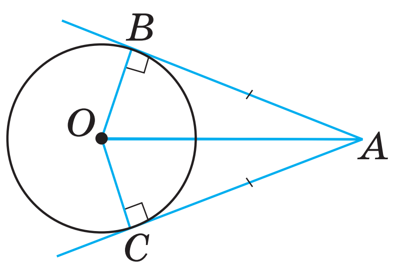


ДОТИЧНА ДО КОЛА

Дотичною **до кола називають пряму, яка має з колом лише одну спільну точку. Цю точку називають *точкою дотику*.**



ВЛАСТИВІСТЬ ВІДРІЗКІВ ДОТИЧНИХ, ПРОВЕДЕНИХ З ОДНІЄЇ ТОЧКИ



Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв	Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	ен
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	ер
Ff	*Ff*	еф	Ss	*Ss*	ес
Gg	*Gg*	же	Tt	*Tt*	те
Hh	*Hh*	аш	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	і	Vv	*Vv*	ве
Jj	*Jj*	йот (жі)	Ww	*Ww*	дубль-ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	ікс
Ll	*Ll*	ель	Yy	*Yy*	ігрек
Mm	*Mm*	ем	Zz	*Zz*	зет

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

ГЕОМЕТРІЯ

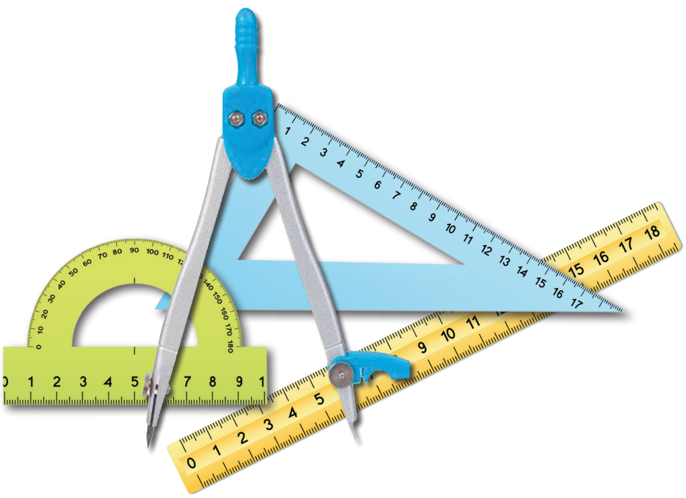
Підручник для осіб
з особливими освітніми потребами
(Н 54.1–Н 54.2)

7 клас

(у 2 частинах)

ЧАСТИНА 2

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



Київ
«Генеза»
2024

УДК 514*кл7(075.3.056.262)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Відповідає модельній навчальній програмі «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Істер О. С.
І-89 Геометрія : підруч. для осіб з особливими освіт. потребами (Н 54.1–Н 54.2) : 7 кл. (У 2 ч.) : Ч. 2 / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2024. — 144 с. : іл.

ISBN 978-617-8353-

ISBN 978-617-8353- (ч. 2)

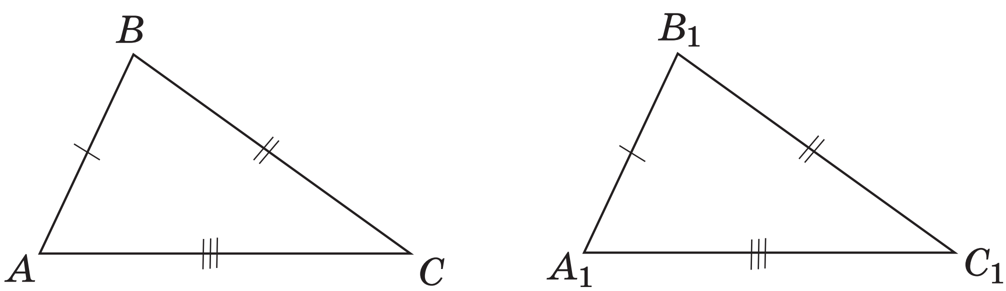
УДК 514*кл7(075.3.056.262)

ISBN 978-617-8353-
ISBN 978-617-8353- (ч. 2)

§ 16. Третя ознака рівності трикутників

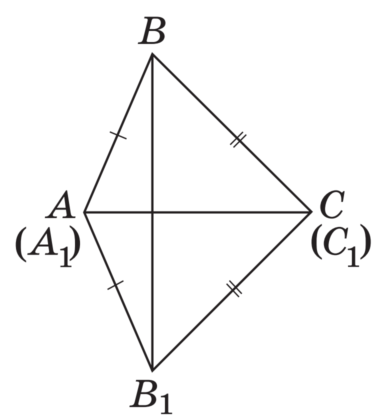
Ви вже знаєте дві ознаки рівності трикутників (за двома сторонами і кутом між ними та за стороною і двома прилеглими кутами). Розглянемо ще одну ознаку рівності трикутників – за трьома сторонами.

Теорема (третя ознака рівності трикутників).
Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.

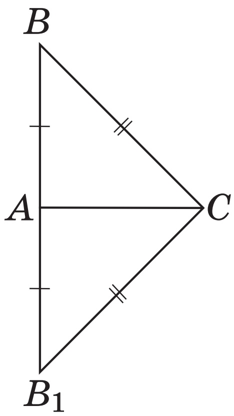


Мал. 16.1

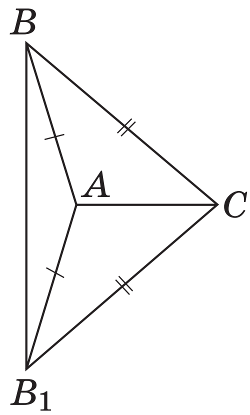
Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (мал. 16.1). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A, вершина C_1 – з вершиною C, а вершини B_1 і B були по різні боки від прямої AC. Можливі три випадки: промінь BB_1 проходить усередині кута ABC (мал. 16.2), промінь BB_1 збігається з однією зі сторін цього кута (мал. 16.3), промінь BB_1 проходить поза кутом ABC (мал. 16.4).



Мал. 16.2



Мал. 16.3



Мал. 16.4

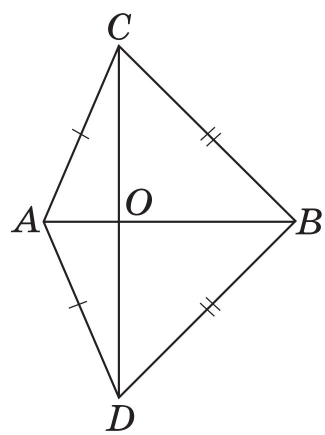
Розглянемо перший випадок (інші випадки розгляньте самостійно). Оскільки за умовою $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, то трикутники ABB_1 і CBB_1 – рівнобедрені з основою BB_1. Тоді $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$ і $\angle CBB_1 = \angle CB_1B$. Тому $\angle ABC = \angle AB_1C$.

Отже, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за першою ознакою рівності трикутників).

Теорему доведено. ■

Приклад. Д а н о: $AC = AD$, $BC = BD$ (див. мал.).

Д о в е с т и: $CO = OD$.



Доведення. 1) Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$. $AC = AD$, $BC = BD$ (за умовою), AB – спільна сторона. Тоді $\triangle ABC = \triangle ABD$ (за третьою ознакою рівності трикутників).

2) $\angle CAB = \angle DAB$ (як відповідні кути рівних трикутників), а тому AB – бісектриса кута CAD.

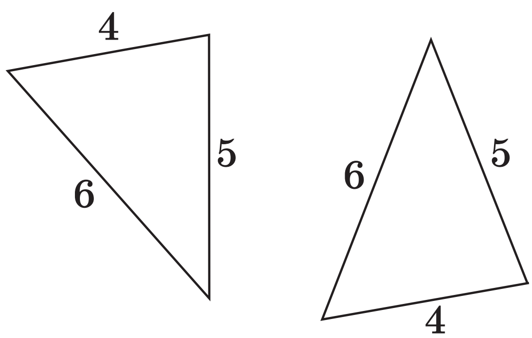
3) Тоді AO – бісектриса рівнобедреного трикутника ACD, проведена до основи, отже, за властивістю рівнобедреного трикутника AO є також і медіаною. Оскільки AO – медіана трикутника ACD, то $CO = OD$, що й потрібно було довести. ■

Сформулюйте та доведіть третю ознаку рівності трикутників.

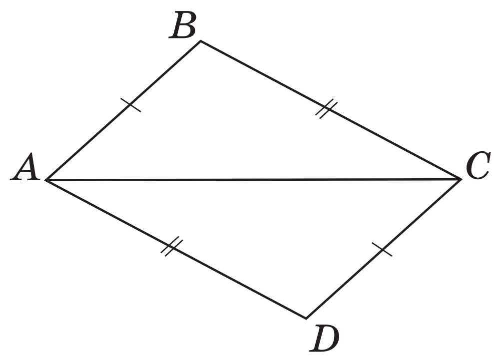
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **399**. (*Усно*.) Чи є трикутники, зображені на малюнку 16.5, рівними між собою? Якщо так, то за якою ознакою?

2 **400**. Доведіть рівність трикутників ABC і CDA, зображених на малюнку 16.6, якщо $AB = DC$ і $BC = AD$.



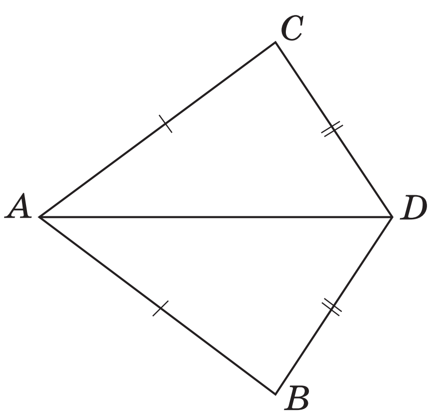
Мал. 16.5



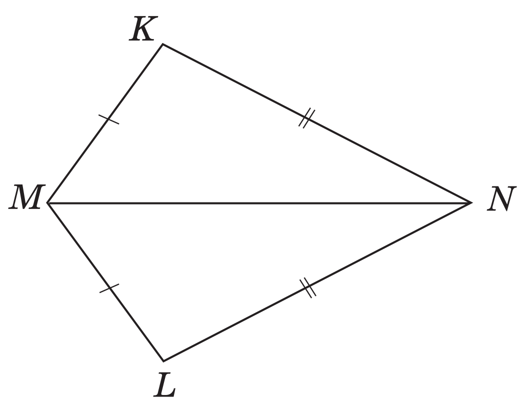
Мал. 16.6

401. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle ABD$ (мал. 16.7), якщо $AC = AB$ і $DC = DB$.

402. На малюнку 16.8 $MK = ML$, $KN = NL$. Доведіть, що $\angle K = \angle L$.



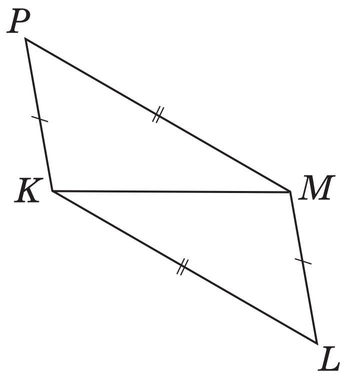
Мал. 16.7



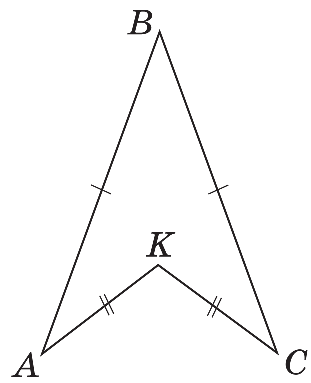
Мал. 16.8

403. На малюнку 16.9 $PK = ML$, $PM = KL$. Доведіть, що $\angle PKM = \angle LMK$.

3 **404**. На малюнку 16.10 $AB = BC$, $AK = KC$. Доведіть, що BK – бісектриса кута ABC.



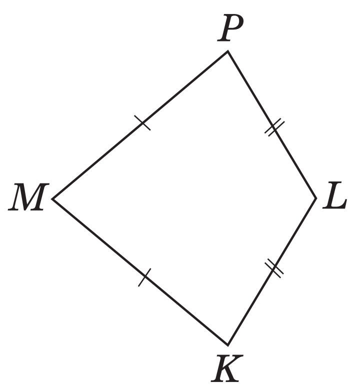
Мал. 16.9



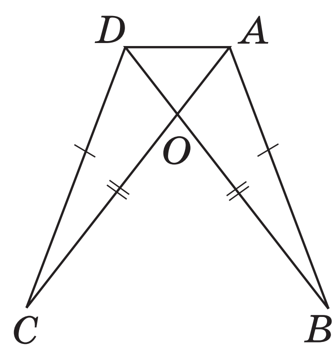
Мал. 16.10

405. На малюнку 16.11 $MP = MK$, $PL = KL$. Доведіть, що ML – бісектриса кута PMK.

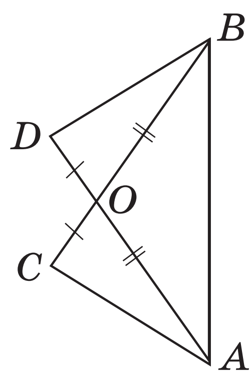
406. Дано: $AB = CD$, $AC = BD$ (мал. 16.12). Довести: $\triangle AOD$ – рівнобедрений.



Мал. 16.11



Мал. 16.12



Мал. 16.13

407. Дано: $AO = OB$, $CO = OD$ (мал. 16.13). Довести: $\triangle ABC = \triangle BAD$.

408. Про трикутники ABC і MNP відомо, що $AB \neq MN$, $BC \neq NP$, $AC \neq MP$. Чи можуть бути рівними такі трикутники?

409. Трикутники ABC і MNP – рівнобедрені. Відомо, що $AB = MN = 6$ см, а $BC = NP = 8$ см. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

4 **410**. Усередині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) взято точку K так, що $BK = KC$. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до BC.

411. Усередині рівнобедреного трикутника DMN ($DM = DN$) взято точку P так, що $MP = PN$. Доведіть, що пряма DP ділить навпіл сторону MN.

Вправи для повторення

412. Як, використовуючи шаблон кута, градусна міра якого $10°$, побудувати перпендикулярні прямі?

413. Промінь AK проходить між сторонами кута BAC, $\angle BAC = 126°$. Відомо, що $4\angle BAK = 5\angle KAC$. Знайдіть градусні міри кутів BAK і KAC.

Життєва математика

414. *Практичне завдання*. Інженери полюбляють трикутник за жорсткість форми: якщо сторони, що утворюють його, з'єднати у вершинах, то форму трикутника неможливо змінити, на відміну від інших геометричних фігур. Властивість жорсткості трикутника широко використовують на практиці. Так, щоб закріпити стовп у вертикальному положенні, до нього ставлять підпорку. Наведіть інші приклади використання цієї властивості, підготуйте презентацію (доповідь або реферат) на цю тему та продемонструйте її класу.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

415. Накресліть трикутники ABC та KLM. Знайдіть суму кутів кожного трикутника.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

416. Накресліть прямокутник розміром 4 × 6 клітинок. Покажіть, як «замостити» (покрити без накладань і вільних клітинок) його куточками, кожний з яких складається з трьох клітинок, так, щоб жодні два з них не утворювали прямокутника.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3 (§§ 11–16)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Дано $\triangle KLM$, у якого $KM = 4$ см, $ML = 7$ см, $KL = 10$ см. Знайдіть його периметр.

А. 20 см **Б.** 21 см
В. 22 см **Г.** 23 см

2. $\triangle PTK$ – різносторонній, $\triangle ABC = \triangle PTK$. Тоді буде правильною рівність $\angle B = \ldots$

А. $\angle P$ **Б.** $\angle T$
В. $\angle K$ **Г.** жодному з кутів трикутника PTK

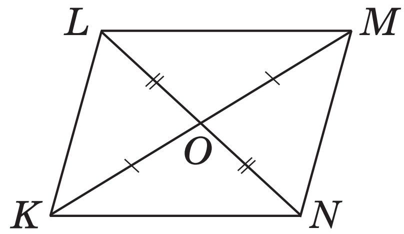
3. Дано $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, де $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тоді…

А. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за першою ознакою)
Б. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за другою ознакою)
В. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за третьою ознакою)
Г. не можна встановити рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а його основа – 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

А. 12 см **Б.** 10 см **В.** 8 см **Г.** 6 см

5. На малюнку $LO = ON$, $KO = OM$, $\angle KOL \neq \angle LOM$. Укажіть правильну рівність.



А. $\triangle KOL = \triangle LOM$

Б. $\triangle KOL = \triangle OMN$

В. $\triangle KOL = \triangle MON$

Г. $\triangle KOL = \triangle NOM$

6. AM, BN і CL – медіани трикутника ABC. Яка з них є ще й бісектрисою і висотою трикутника, якщо $\angle A = \angle B$, а $\angle B \neq \angle C$?

А. AM **Б.** BN **В.** CL **Г.** жодна

3 **7**. Одна зі сторін трикутника вдвічі менша від другої і на 2 см менша від третьої. Знайдіть найбільшу сторону трикутника, якщо його периметр дорівнює 22 см.

А. 5 см **Б.** 7 см **В.** 9 см **Г.** 10 см

8. Відомо, що $\triangle KLM = \triangle MLK$. Знайдіть периметр трикутника KLM, якщо $KL = 6$ см, $KM = 5$ см.

А. 17 см **Б.** 16 см **В.** 18 см **Г.** знайти неможливо

9. BK – висота трикутника ABC, $AB = BC$. Укажіть неправильне твердження.

А. $\angle ABC = \angle BKA$ **Б.** $\angle BAC = \angle BCA$

В. $\triangle BAK = \triangle BCK$ **Г.** $\angle ABK = \angle CBK$

4 **10**. Дано: $\triangle ABC = \triangle BCA$, $AB = 5$ см. Знайти: BC, CA.

А. $BC = 6$ см, $CA = 7$ см **Б.** $BC = 4$ см, $CA = 3$ см

В. $BC = 4$ см, $CA = 4$ см **Г.** $BC = 5$ см, $CA = 5$ см

11. AB – основа рівнобедреного трикутника ABC, CK – його бісектриса. Знайдіть довжину цієї бісектриси, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см, а периметр трикутника ACK дорівнює 30 см.

А. 6 см **Б.** 8 см **В.** 10 см **Г.** 12 см

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 9 09.07.2024 12:51:05

12. У трикутнику ABC $AB = AC$. Точка M така, що $BM = MC$. Укажіть неправильне твердження.

А. $\angle MBC = \angle MCB$ **Б.** $\angle MBA > \angle MCA$

В. $\angle BMA = \angle CMA$ **Г.** $\angle BAM = \angle CAM$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

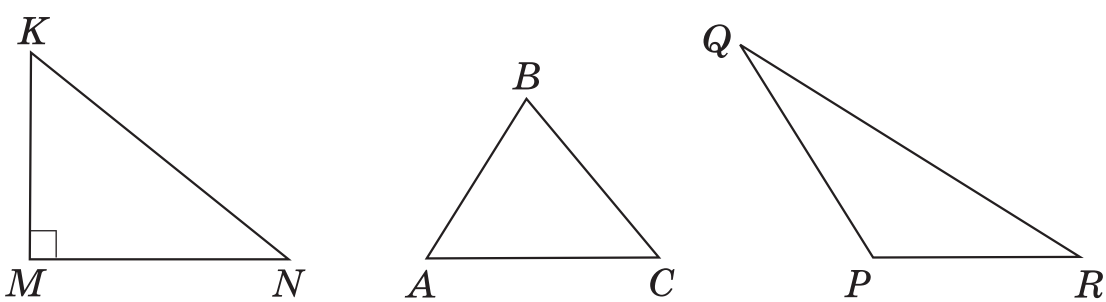
3 **13.** Периметр трикутника ABC дорівнює 37 см, $AB : BC = 2 : 3$, $AC - AB = 2$ см. Установіть відповідність між сторонами трикутника (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Сторони трикутника	*Довжини сторін трикутника*
	А. 10 см
1. AB	**Б.** 12 см
2. BC	**В.** 15 см
3. CA	**Г.** 16 см

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 11–16

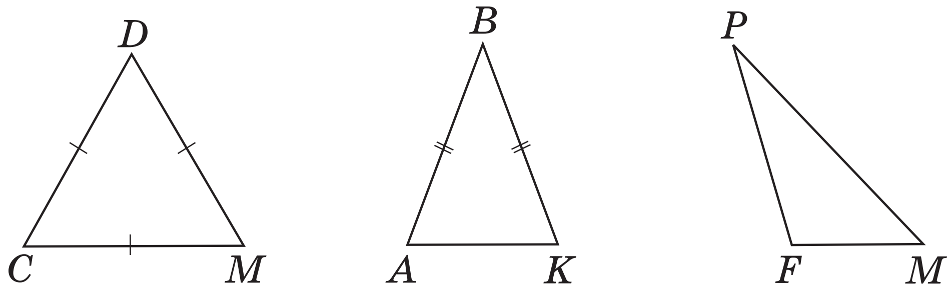
1 **1.** Накресліть $\triangle MNK$. Запишіть назви його вершин, сторін та кутів.

2. Який із зображених на малюнку 16.14 трикутників є гострокутний, який – прямокутний, а який – тупокутний?



Мал. 16.14

3. Який із зображених на малюнку 16.15 трикутників є рівнобедрений, який – рівносторонній, а який – різносторонній?



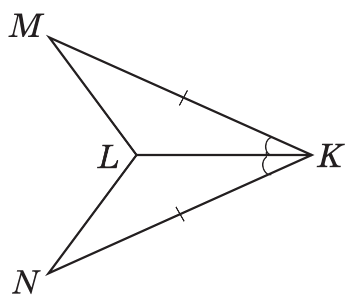
Мал. 16.15

2

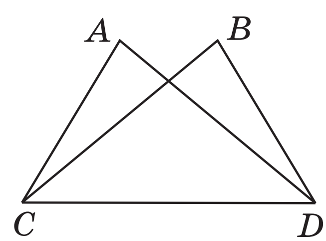
4. $\triangle ABC = \triangle KMF$. Відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $KF = 7$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KMF.

5. На малюнку 16.16 $MK = KN$, $\angle LKM = \angle LKN$. Доведіть, що $\triangle MKL = \triangle NKL$.

6. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника з основою 12 см завдовжки, бічна сторона якого на 3 см більша за основу.



Мал. 16.16



Мал. 16.17

3

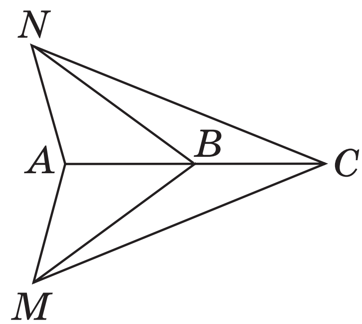
7. На малюнку 16.17 $AC = BD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ADC$.

8. Одна сторона трикутника вдвічі менша від другої і на 3 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 23 см.

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 11 09.07.2024 12:51:05

9. У рівнобедреному трикутнику *KML* з основою *KL* проведено медіану *MP*. Знайдіть периметр трикутника *KML*, якщо *MP* = 8 дм, а периметр трикутника *MKP* дорівнює 24 дм.

Додаткові вправи



10. На малюнку △ *ANB* = △ *AMB*. Доведіть, що *NC* = *MC*.

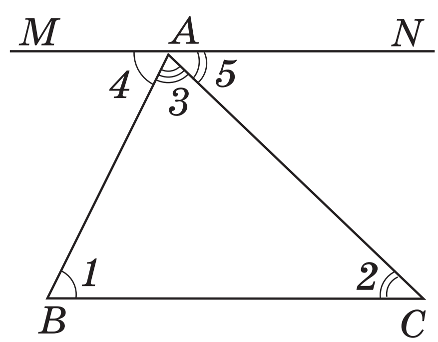
11. Відомо, що △ *MKL* = △ *KLM*. Знайдіть периметр трикутника *MKL*, якщо він на 10 см більший за сторону *MK*.

§ 17. Сума кутів трикутника

Розглянемо одну з найважливіших теорем геометрії.

> Теорема (про суму кутів трикутника).
> **Сума кутів трикутника дорівнює 180°.**

Доведення. Розглянемо трикутник *ABC* і доведемо, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.



1) Проведемо через вершину *A* пряму *MN* паралельно прямій *BC* (див. мал.). Позначимо $\angle B = \angle 1$, $\angle C = \angle 2$, $\angle BAC = \angle 3$, $\angle MAB = \angle 4$, $\angle NAC = \angle 5$.

Кути *1* і *4* – внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих *BC* і *MN* січною *AB*, а кути *2* і *5* – внутрішні різносторонні кути при перетині тих самих прямих січною *AC*. Тому $\angle 1 = \angle 4$ і $\angle 2 = \angle 5$.

2) $\angle MAN$ – розгорнутий, тому: $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$.

Оскільки $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 2$, то $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 1 + \angle 2 = 180°$, тобто $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, що й потрібно було довести. ■

Н Наслідок. **У будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі; трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут.**

Доведення. Припустимо, що в трикутнику лише один кут є гострим. Тоді сума двох інших кутів, що не є гострими, не менша від 180°. А отже, у сумі з гострим перевищить 180°, що суперечить доведеній теоремі. Прийшли до протиріччя, бо наше припущення є неправильним. Отже, у кожного трикутника принаймні два кути гострі, а тому трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут. ■

Враховуючи цей наслідок, можна сказати, що гострокутний трикутник має три гострих кути; прямокутний трикутник має один прямий і два гострих кути; тупокутний трикутник має один тупий і два гострих кути.

Приклад 1. Визначити вид трикутника, якщо два його кути дорівнюють: 1) 40° і 30°; 2) 54° і 36°; 3) 80° і 60°.

Розв'язання. Якщо у трикутнику ABC задано, наприклад, кути A і B, то кут C можна знайти так: $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$. Знайдемо у кожній задачі третій кут, позначивши його $\angle C$, і визначимо вид трикутника.

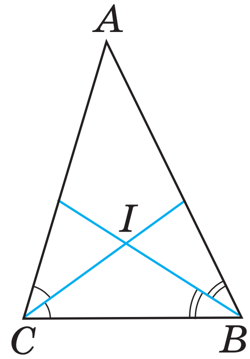
1) $\angle C = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$; трикутник тупокутний, оскільки має тупий кут.

2) $\angle C = 180^\circ - (54^\circ + 36^\circ) = 90^\circ$; трикутник прямокутний, оскільки має прямий кут.

3) $\angle C = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ$; усі кути трикутника гострі, тому трикутник – гострокутний.

Відповідь: 1) тупокутний;
2) прямокутний;
3) гострокутний.

Приклад 2. Бісектриси кутів B і C трикутника ABC перетинаються в точці I. Довести, що $\angle BIC = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$.



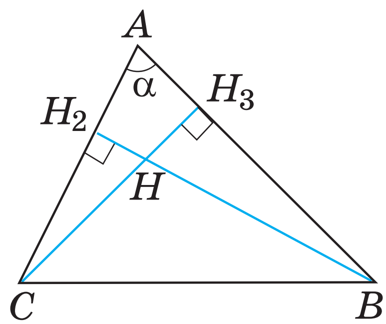
Доведення. 1) $\angle ICB = \dfrac{\angle ACB}{2}$, $\angle IBC = \dfrac{\angle ABC}{2}$ (див. мал.).

2) Тоді $\angle BIC = 180° - (\angle ICB + \angle IBC) =$

$$= 180° - \left(\frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle ABC}{2}\right) = 180° - \frac{\angle ACB + \angle ABC}{2} =$$

$$= 180° - \frac{180° - \angle A}{2} = 180° - 90° + \frac{\angle A}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2}$$ (скористалися тим, що сума кутів кожного з трикутників BCI і ABC дорівнює $180°$), що й потрібно було довести. ■

Приклад 3. Висоти BH_2 і CH_3 гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H, $\angle A = \alpha$ (див. мал.). Знайти $\angle BHC$.



Розв'язання. Розглянемо трикутник H_2BC.

1) $\angle H_2BC = 180° - (90° + \angle ACB) =$
$= 90° - \angle ACB$.

У $\triangle H_3CB$:

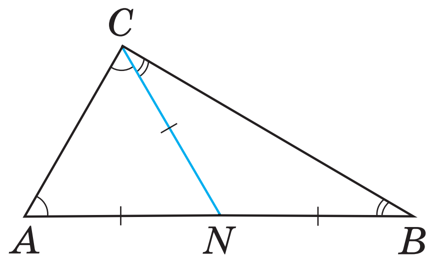
$\angle H_3CB = 180° - (90° + \angle ABC) = 90° - \angle ABC$.

2) Тоді у $\triangle HCB$: $\angle BHC = 180° - (\angle HBC + \angle HCB) = 180° - (90° - \angle ACB + 90° - \angle ABC) = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle A = 180° - \alpha$. Отже, $\angle BHC = 180° - \alpha$.

Відповідь: $180° - \alpha$.

Приклад 4. Медіана CN трикутника ABC дорівнює половині сторони AB. Довести, що в трикутнику ABC $\angle C = 90°$.

Доведення (див. мал.). 1) Оскільки $CN = \frac{AB}{2}$ і N – середина відрізка AB, то $CN = AN = BN$.



2) Отже, трикутники ANC і CNB – рівнобедрені. Тому $\angle A = \angle ACN$, $\angle B = \angle BCN$. Таким чином, $\angle C = \angle A + \angle B$.

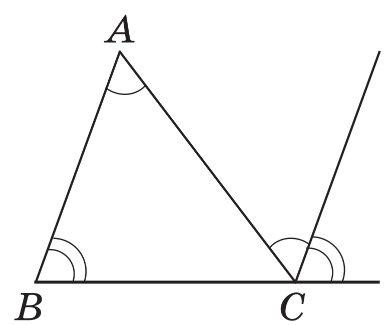
3) Але ж $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Тому $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$. Отже, $\angle C = 180^\circ - \angle C$. Звідки $\angle C = 90^\circ$.

4) $\triangle ABC$ – прямокутний з прямим кутом C, що й потрібно було довести. ■

А ще раніше... Властивість про суму кутів трикутника експериментальним шляхом було встановлено в Давньому Єгипті, проте відомості про різні способи доведення цієї теореми належать до більш пізніх часів.

Доведення, яке ми розглянули вище, є в коментарях Прокла до «Начал» Евкліда. Він же стверджував, що це доведення було відоме ще учням школи Піфагора (піфагорійцям) у V ст. до н. е.

А сам Евклід у першій книжці «Начал» запропонував доведення теореми про суму кутів трикутника у спосіб, який можна побачити на малюнку (виконайте це доведення самостійно).



? Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів трикутника.
● Сформулюйте та доведіть наслідок із цієї теореми.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **417**. (*Усно*.) Дано $\triangle PLK$. Знайдіть значення суми $\angle P + \angle L + \angle K$.

418. Чи існує трикутник з кутами:

1) 30°, 60° і 70°; 2) 70°, 40° і 70°?

419. Чи існує трикутник з кутами:

1) 50°, 70° і 80°;

2) 30°, 60° і 90°?

420. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють:

1) 43° і 54°; 2) 9° і 93°; 3) 83° і 89°.

421. Знайдіть третій кут трикутника, якщо перший і другий кути дорівнюють:

1) 15° і 38°; 2) 28° і 105°; 3) 7° і 91°.

2

422. (*Усно.*) Закінчіть речення:

1) якщо один з кутів трикутника тупий, то інші… ;

2) якщо один з кутів трикутника прямий, то інші… .

423. Сума двох кутів трикутника дорівнює 126°. Знайдіть третій кут трикутника.

424. У трикутнику ABC $\angle A + \angle B = 58°$. Знайдіть $\angle C$.

425. Один з кутів трикутника дорівнює 62°. Знайдіть суму градусних мір двох інших кутів.

426. Доведіть, що кожний з кутів рівностороннього трикутника дорівнює 60°.

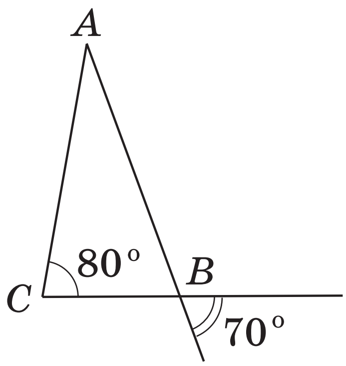
427. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть кут при вершині.

428. Знайдіть кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює 45°.

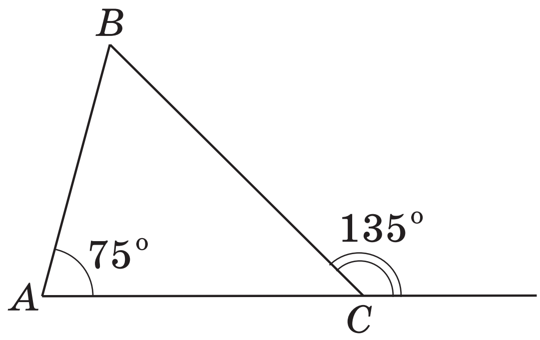
429. Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 80°.

430. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Знайдіть кути при основі.

431. Знайдіть невідомі кути трикутника *ABC* на малюнках 17.1, 17.2.



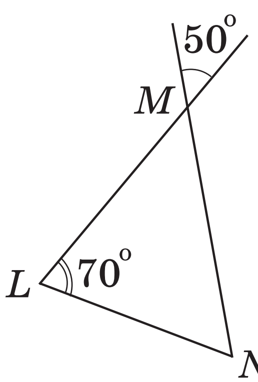
Мал. 17.1



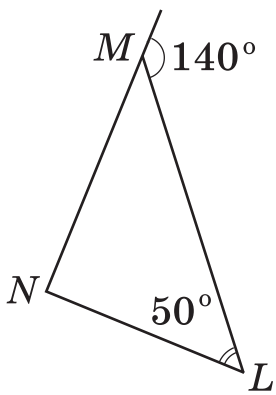
Мал. 17.2

432. Знайдіть невідомі кути трикутника *MNL* на малюнках 17.3, 17.4.

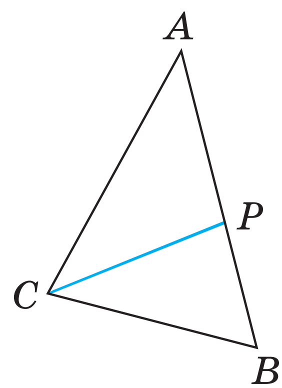
433. У трикутнику *ABC* проведено бісектрису *CP* (мал. 17.5). Знайдіть $\angle PCB$, якщо $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$.



Мал. 17.3



Мал. 17.4



Мал. 17.5

434. У трикутнику *ABC* проведено бісектрису *CP* (мал. 17.5). Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle B = 65°$, $\angle ACP = 40°$.

435. Знайдіть кути трикутника *MNL*, якщо $\angle M + \angle N = 120°$, $\angle M + \angle L = 140°$.

436. Знайдіть кути трикутника *ABC*, якщо $\angle A + \angle B = 100°$, $\angle A + \angle C = 130°$.

437. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не менший від 60°.

438. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не більший за 60°.

439. У трикутнику ABC $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$. Знайдіть ці кути.

440. Знайдіть градусні міри кутів трикутника, якщо вони відносяться як 2 : 3 : 5.

441. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 15° більший за кут при вершині.

442. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині на 24° більший за кут при основі.

443. Доведіть, що кути при основі рівнобедреного трикутника гострі.

444. Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то трикутник – рівносторонній. Доведіть це твердження. (Розгляньте два випадки.)

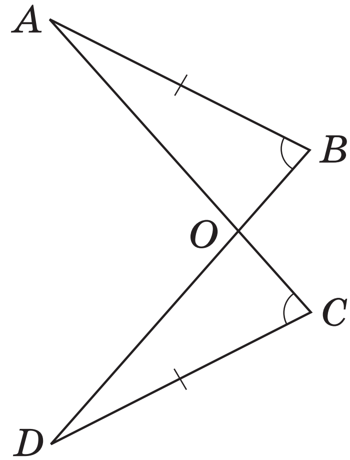
445. Розв’яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище видатного українського вченого в галузі ракетобудування та космонавтики. Дізнайтеся з інтернету про його біографію та наукові досягнення.

У $\triangle ABC$: $\angle A = 80°$. Визначте градусні міри кутів B і C, якщо	$\angle B$	$\angle C$
кут B на 14° більший за кут C	О	Ь
кут B у 3 рази менший від кута C	Л	К
$\angle B : \angle C = 2 : 3$	В	Р

75°	57°	60°	57°	25°	43°	57°	40°

446. Один з кутів трикутника вдвічі більший за другий. Знайдіть ці кути, якщо третій кут дорівнює 36°.

447. На малюнку 17.6 $AB = DC$, $\angle B = \angle C$. Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle DOC$.



Мал. 17.6

448. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

449. У трикутнику два кути дорівнюють 46° і 64°. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать бісектриси цих кутів.

450. У трикутнику два кути дорівнюють 70° і 80°. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать висоти цих кутів.

451. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює:

1) 12°; 2) 92°.

452. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює:

1) 28°; 2) 106°.

4 **453.** Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній перетинаються під прямим кутом.

454. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них удвічі більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

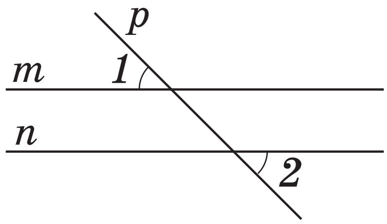
455. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них на 15° більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

456. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 72°, а бісектриса кута при основі цього трикутника – 5 см. Знайдіть основу трикутника.

Вправи для повторення

457. Точка K лежить між точками P і L. Знайдіть PK, якщо $PL = 56$ мм, а $KL = 3$ см 4 мм.

458. Дано $\angle 1 = \angle 2$ (див. мал.). Доведіть, що $m \parallel n$.



459. $\angle AOB = 40°$, $\angle AOC = 60°$. Знайдіть $\angle BOC$. Скільки випадків слід розглянути?

460. Трикутники ABC і ABD – рівносторонні. Доведіть, що $AB \perp CD$.

Життєва математика

461. На центральну міську клумбу, що має форму прямокутника зі сторонами 20 м та 6 м, потрібно висадити цибулини тюльпанів з розрахунку 60 цибулин на 1 м^2.

1) Скільки цибулин потрібно заготувати для висаджування?

2) Тюльпани продають в упаковках по 3 цибулини. Ціна такої упаковки 28 грн. Магазин готовий зробити знижки міській адміністрації за гуртову покупку на 15 %. Скільки доведеться заплатити за тюльпани?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

462. Чи можна двома ударами сокири розрубати підкову (див. мал.) на 6 частин, не переміщуючи частин після першого удару? Якщо відповідь ствердна, укажіть, як це зробити.

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 20 09.07.2024 12:51:11

§ 18. Зовнішній кут трикутника та його властивості. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

Зовнішній кут трикутника

Зовнішнім кутом трикутника **називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.**

На малюнку 18.1 кут BAK – зовнішній кут трикутника ABC.

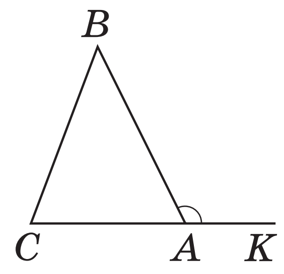
Щоб не плутати кут трикутника із зовнішнім кутом, його іноді називають *внутрішнім кутом*.

Т Теорема 1 (властивість зовнішнього кута трикутника). **Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.**

Доведення. Нехай $\angle BAK$ – зовнішній кут трикутника ABC (мал. 18.1). Враховуючи властивість суміжних кутів, отримаємо

$\angle BAK = 180° - \angle BAC$.

Водночас, врахувавши теорему про суму кутів трикутника, $\angle B + \angle C = 180° - \angle BAC$. Тому $\angle BAK = \angle B + \angle C$, що й потрібно було довести. ■



Мал. 18.1

Н Наслідок. **Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним.**

Приклад 1. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайти внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться як 3 : 5.

Розв’язання. Нехай $\angle BAK$ – зовнішній кут трикутника ABC (мал. 18.1), $\angle BAK = 120°$.

1) Оскільки $\angle B : \angle C = 3 : 5$, то можемо позначити $\angle B = 3x$, $\angle C = 5x$.

2) Оскільки $\angle BAK = \angle B + \angle C$ (за властивістю зовнішнього кута), маємо рівняння: $3x + 5x = 120°$, звідки $x = 15°$.

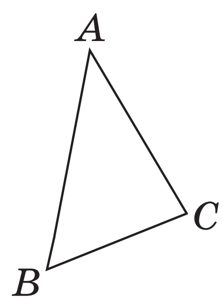
3) Тоді $\angle B = 3 \cdot 15° = 45°$, $\angle C = 5 \cdot 15° = 75°$.

Відповідь: 45°; 75°.

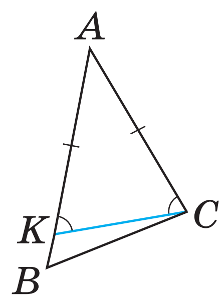
Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

Розглянемо ще одну важливу властивість трикутника.

> Теорема 2 (про співвідношення між сторонами і кутами трикутника). **У трикутнику:**
> **1) проти більшої сторони лежить більший кут;**
> **2) проти більшого кута лежить більша сторона.**



Мал. 18.2



Мал. 18.3

Доведення. 1) Нехай у трикутнику ABC $AB > AC$ (мал. 18.2). Доведемо, що $\angle C > \angle B$. Відкладемо на стороні AB відрізок AK, що дорівнює відрізку AC (мал. 18.3). Оскільки $AB > AC$, то точка K належить відрізку AB. Тому $\angle ACK$ є частиною кута ACB і $\angle ACK < \angle ACB$.

$\triangle AKC$ – рівнобедрений, тому $\angle AKC = \angle ACK$. Але $\angle AKC$ – зовнішній кут трикутника KBC. Тому $\angle AKC > \angle B$. Отже, і $\angle ACK > \angle B$, а тому $\angle ACB > \angle B$.

2) Нехай у трикутнику ABC $\angle C > \angle B$ (мал. 18.2). Доведемо, що $AB > AC$. Припустимо протилежне, тобто що $AB = AC$ або $AB < AC$. Якщо $AB = AC$, то $\triangle ABC$ – рівнобедрений, і тоді $\angle C = \angle B$. Це супе-

речить умові. Якщо припустити, що $AB < AC$, то за першою частиною теореми отримаємо, що $\angle C < \angle B$, і це також суперечить умові. Наше припущення неправильне. Отже, $AB > AC$, що й потрібно було довести. ■

Приклад 2. У трикутнику ABC: $\angle A = 57°$, $\angle B = 61°$. Яка зі сторін трикутника є найбільшою?

Розв'язання. У трикутнику більшою є та сторона, яка лежить проти більшого кута (мал. 18.2).

$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (57° + 61°) = 62°$.

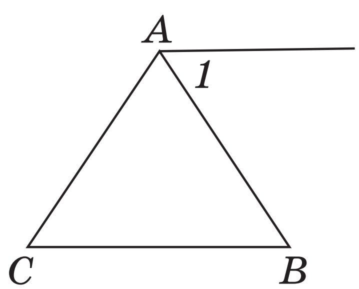
2) Оскільки $\angle C > \angle A$ і $\angle C > \angle B$, то найбільшою є сторона, яка лежить проти кута C, тобто сторона AB.

Відповідь: AB.

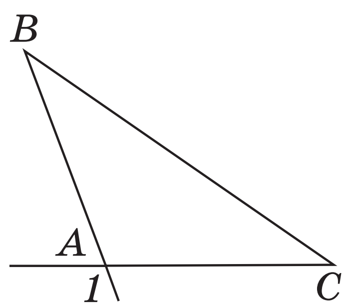
? Що таке зовнішній кут трикутника? ● Сформулюйте та доведіть теорему про властивість зовнішнього кута трикутника. ● Сформулюйте наслідок із цієї теореми. ● Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

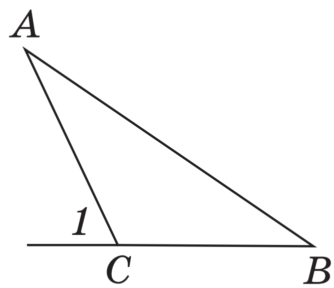
463. (*Усно.*) На яких з малюнків 18.4–18.6 кут *1* є зовнішнім кутом трикутника ABC?



Мал. 18.4



Мал. 18.5



Мал. 18.6

464. Накресліть $\triangle ABC$ та його зовнішній кут при вершині A.

465. Накресліть $\triangle DMN$ та його зовнішній кут при вершині D.

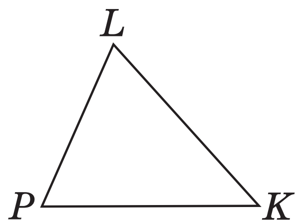
466. (*Усно*.) Укажіть суму внутрішнього кута трикутника і його зовнішнього кута при тій самій вершині.

467. Зовнішній кут при вершині C трикутника ABC дорівнює $65°$ (мал. 18.6). Знайдіть суму внутрішніх кутів A і B цього трикутника.

468. Сума внутрішніх кутів A і B трикутника ABC дорівнює $70°$ (мал. 18.6). Знайдіть зовнішній кут цього трикутника при вершині C.

469. (*Усно*.) У $\triangle PLK$ $PL < LK$ (мал. 18.7). Порівняйте кути P і K цього трикутника.

470. У $\triangle PLK$ $\angle L > \angle K$ (мал. 18.7). Порівняйте сторони PK і PL цього трикутника.



Мал. 18.7

471. Два кути трикутника дорівнюють $62°$ і $37°$. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

472. У трикутнику ABC $\angle A = 43°$, $\angle B = 102°$. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при вершині C.

473. (*Усно*.) Скільки гострих кутів може бути серед зовнішніх кутів трикутника?

474. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $100°$. Знайдіть кут при основі трикутника.

475. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $55°$. Знайдіть зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами.

476. Зовнішній кут при вершині A трикутника ABC дорівнює $105°$. Знайдіть $\angle B$, якщо $\angle C = 45°$.

477. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює $120°$. Знайдіть внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, якщо другий внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнює $18°$.

478. Внутрішні кути трикутника дорівнюють 45° і 70°. Знайдіть градусну міру зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній з його вершин.

479. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника відповідно дорівнюють 110° і 140°. Знайдіть градусну міру кожного з трьох внутрішніх його кутів.

3

480. Розв'яжіть задачі, подані в таблиці, і прочитайте назву одного із символів нашої держави.

У трикутнику *ABC* зовнішній кут при вершині *C* дорівнює 140°. Знайдіть внутрішні кути *A* і *B* цього трикутника, якщо	$\angle A$	$\angle B$
кут *B* на 30° більший за кут *A*	Р	А
кут *A* у 4 рази більший за кут *B*	О	П

28°	55°	85°	28°	112°	55°

481. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайдіть внутрішні кути, які не суміжні з ним, якщо:

1) один з них на 20° менший від другого;

2) один з них утричі менший від другого.

482. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 118°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

483. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 42°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

4

484. Доведіть, що сума зовнішніх кутів будь-якого трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

485. Зовнішні кути трикутника відносяться як 3 : 5 : 4. Знайдіть відношення його внутрішніх кутів.

486. Внутрішні кути трикутника відносяться як 7 : 8 : 9. Знайдіть відношення зовнішніх кутів трикутника, не знаходячи їхніх градусних мір.

487. Доведіть, що бісектриси зовнішнього і внутрішнього кутів трикутника при одній вершині перпендикулярні між собою.

Вправи для повторення

488. Промінь, що проходить між сторонами прямого кута, ділить його на два кути, різниця яких складає $\frac{1}{3}$ від їх суми. Знайдіть градусні міри цих кутів.

489. Відрізок *AB*, довжина якого 22,8 см, поділено на три частини. Відношення двох з них дорівнює 1 : 2, а третя – на 1,8 см довша за більшу з двох перших частин. Знайдіть довжини кожної з трьох частин відрізка.

Життєва математика

490. У розпорядженні дитячого садочка є дві ділянки. Одна з них має форму прямокутника, 32 м завдовжки і 18 м завширшки. Друга ділянка є квадратною, такої самої площі, що й перша. У садівника є 97 м паркану.

1) Яку з ділянок садівник зможе обгородити парканом?

2) Скільки метрів паркану ще потрібно докупити, щоб можна було обгородити парканом обидві ділянки?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

491. Накресліть $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. У скільки разів сторона *BC* цього трикутника менша від сторони *AB*?

492. Накресліть $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, та проведіть медіану CM цього трикутника. У скільки разів медіана CM менша від сторони AB?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

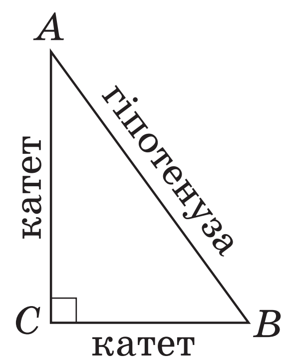
493. Розріжте деякий квадрат на два рівних між собою п'ятикутники.

§ 19. Прямокутні трикутники. Властивості та ознаки рівності прямокутних трикутників

Прямокутний трикутник

***Трикутник* називають *прямокутним*, якщо один з його кутів прямий.**

На малюнку 19.1 зображено прямокутний трикутник ABC, у нього $\angle C = 90°$. Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають ***гіпотенузою***, а дві інші сторони – ***катетами***.



Мал. 19.1

Властивості прямокутних трикутників

Розглянемо властивості прямокутних трикутників та їх застосування до розв'язування задач.

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Справді, сума кутів трикутника дорівнює 180°, прямий кут становить 90°. Тому сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює: $180° - 90° = 90°$.

Приклад 1. Знайти гострі кути прямокутного трикутника, якщо один з них становить $\frac{2}{7}$ від іншого.

Розв'язання. Розглянемо прямокутний трикутник ABC (мал. 19.1), у якого $\angle A = \frac{2}{7}\angle B$.

1) Позначимо $\angle B = x°$, тоді $\angle A = \frac{2}{7}x°$.

2) Використовуючи властивість, маємо $x + \frac{2}{7}x = 90°$, тоді $x = 70°$.

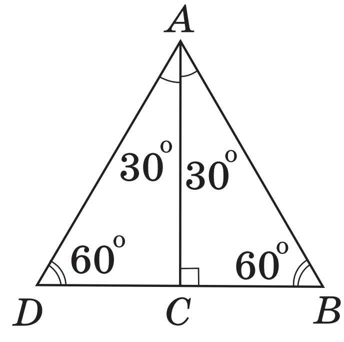
3) Отже, $\angle B = 70°$; $\angle A = \frac{2}{7} \cdot 70° = 20°$.

Відповідь: 20°; 70°.

2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.

Ця властивість є наслідком теореми про співвідношення між сторонами і кутами трикутника, оскільки прямий кут більший за гострий.

3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.



Доведення. Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$ з прямим кутом C і кутом A, що дорівнює 30° (див. мал.). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ADC, що йому дорівнює. Тоді $\angle B = \angle D = 90° - 30° = 60°$ і $\angle DAB = 30° + 30° = 60°$. Отже, $\triangle ABD$ –

рівносторонній. Тому $DB = AB$. Оскільки $BC = \frac{1}{2}BD$, то $BC = \frac{1}{2}AB$, що й потрібно було довести. ■

Приклад 2. У трикутнику ABC: $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (мал. 19.1). Гіпотенуза трикутника на 5 см більша за менший катет. Знайти гіпотенузу трикутника.

Розв'язання. 1) Оскільки у прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C маємо $\angle A = 30°$, то за властивістю $BC = \frac{1}{2}AB$.

2) $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 30° = 60°$; $\angle A < \angle B$, тому $BC < AC$. А отже, BC є меншим катетом трикутника ABC.

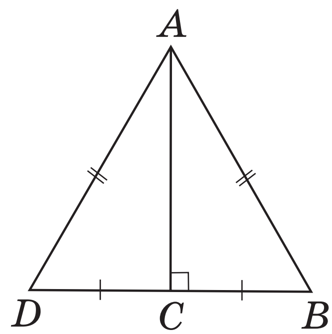
3) Позначимо $BC = x$ (см), тоді $AB = 2x$ (см).

4) За умовою $2x - x = 5$; $x = 5$ (см).

5) Тоді $AB = 2 \cdot 5 = 10$ (см).

Відповідь: 10 см.

4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.



Доведення. Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$, у якого катет BC дорівнює половині гіпотенузи AB (див. мал.). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ADC, що йому дорівнює. Оскільки $BC = \frac{1}{2}AB$, то $BD = AB = AD$. Маємо рівносторонній трикутник ABD, тому $\angle B = 60°$. У трикутнику ABC $\angle BAC = 90° - 60° = 30°$, що й потрібно було довести. ■

Ознаки рівності прямокутних трикутників

Розглянемо *ознаки рівності прямокутних трикутників*.

З першої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні між собою.

З другої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.

Якщо у двох прямокутних трикутників є одна пара рівних між собою гострих кутів, то й інша пара гострих кутів – також рівні між собою кути (це випливає з властивості 1 прямокутних трикутників). Тому маємо ще дві ознаки рівності прямокутних трикутників:

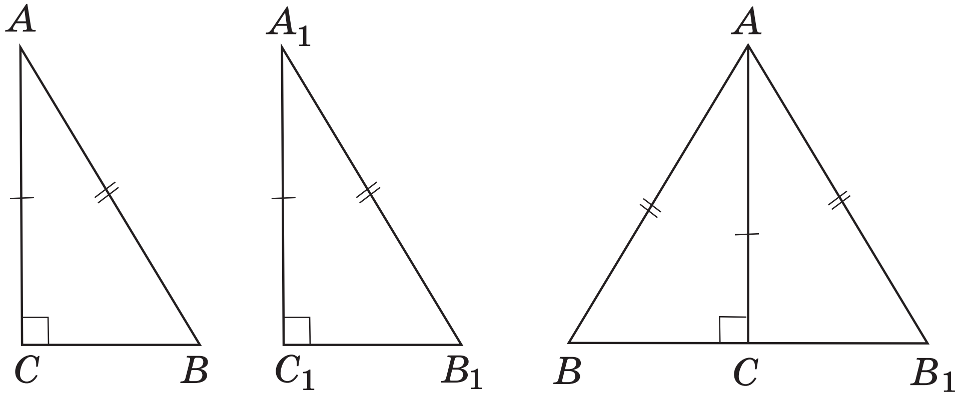
якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою;

якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 30 09.07.2024 12:51:16

Т Теорема (ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою).
Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні між собою.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких кути C і C_1 – прямі і $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (див. мал.). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



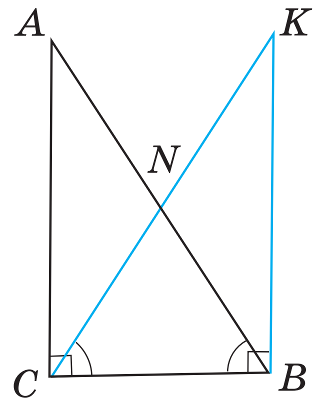
Прикладемо $\triangle ABC$ до $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, а вершина C – з вершиною C_1 (мал. праворуч). Оскільки $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1 = 90°$, то $\angle BCB_1$ – розгорнутий, а тому точки B, C, B_1 лежать на одній прямій. $\triangle ABB_1$ – рівнобедрений, бо $AB = AB_1$. AC – його висота, проведена до основи. Звідси AC є також і медіаною, тому $BC = CB_1$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників. ■

Властивість медіани прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи

Розглянемо ще одну властивість прямокутного трикутника.

5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Доведення. Проведемо перпендикуляр BK до сторони BC так, щоб $BK = CA$ (див. мал.). Тоді $\triangle ABC$ і $\triangle KCB$ – прямокутні, BC – їхній спільний катет, $AC = BK$ (за побудовою). Тому $\triangle ABC = \triangle KCB$ (за двома катетами), тоді $\angle ABC = \angle KCB$. Отже, $\triangle NBC$ – рівнобедрений і $BN = CN$. Аналогічно можна довести, що $CN = AN$. Таким чином, $BN = CN = AN$. Тому CN – медіана і $CN = \dfrac{AB}{2}$, що й потрібно було довести. ■



Зауважимо, що з доведеної властивості можна зробити важливий висновок. Оскільки $CN = \dfrac{AB}{2}$ і $AN = BN = \dfrac{AB}{2}$, то $AN = BN = CN$.

Тобто

у прямокутному трикутнику середина гіпотенузи рівновіддалена від його вершин.

А ще раніше...

Про прямокутний трикутник згадується в папірусі Ахмеса. Деякі відомості про нього знали також вавилонські геометри. Ще тоді землеміри використовували ці властивості для визначення відстані на місцевості.

Термін «гіпотенуза» походить від грецького слова «іпотейнуза» і перекладається як «що тягнеться під чим-небудь», «та, що стягує». Походить це слово, найімовірніше, від давньоєгипетських арф, струни яких натягувалися на кінцях двох взаємно перпендикулярних підставок.

Термін «катет» походить від грецького слова «катетос», що перекладається як «схил», «перпендикуляр».

Евклід у своїх роботах для катетів використовував формулювання «сторони, що містять прямий кут», а для гіпотенузи – «сторона, що стягує прямий кут».

? Який трикутник називають прямокутним? • Які назви мають сторони прямокутного трикутника? • Сформулюйте та доведіть властивості прямокутного трикутника. • Сформулюйте та доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.

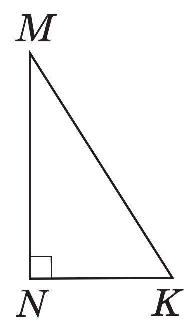
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

494. (*Усно*.) 1) Як називають трикутник, зображений на малюнку 19.2?

2) Назвіть гіпотенузу і катети цього трикутника.

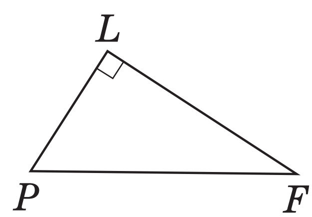
3) Яка зі сторін цього трикутника найдовша?



Мал. 19.2

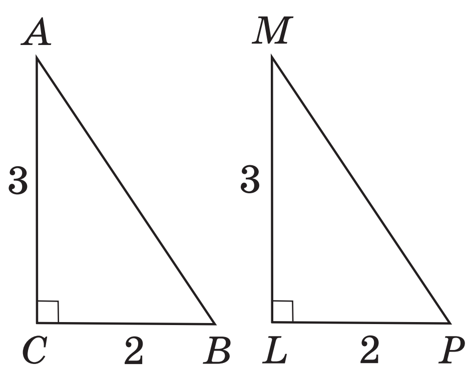
495. 1) Назвіть гіпотенузу і катети прямокутного трикутника *PFL* (мал. 19.3).

2) Яка сторона довша: *PL* чи *PF*; *LF* чи *PF*?

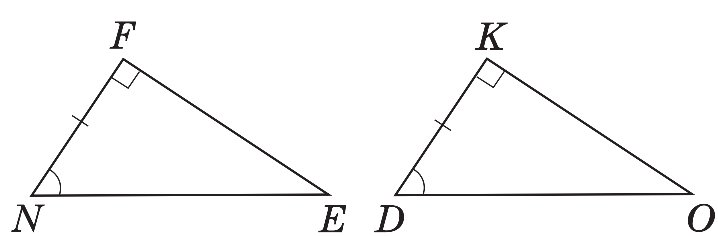


Мал. 19.3

496. За якими елементами прямокутні трикутники на малюнках 19.4 і 19.5 є рівними? Запишіть відповідні рівності.

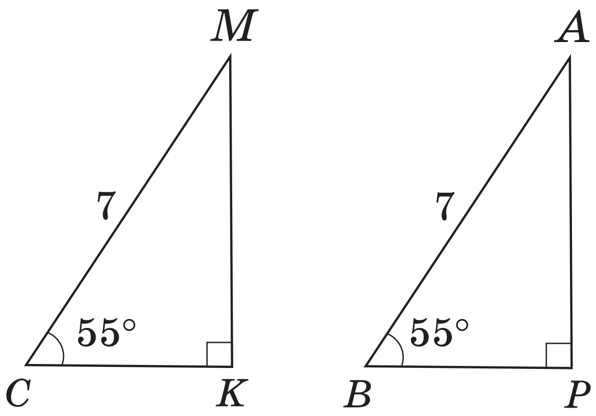


Мал. 19.4

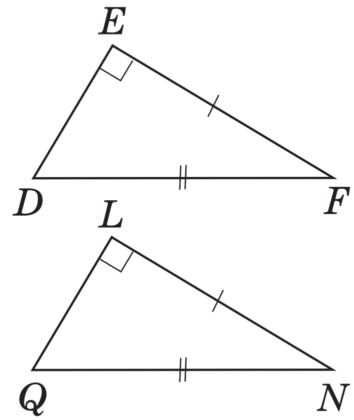


Мал. 19.5

497. За якими елементами є рівними прямокутні трикутники на малюнках 19.6 і 19.7? Запишіть відповідні рівності.



Мал. 19.6



Мал. 19.7

498. Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо інший його гострий кут дорівнює:

1) 18°; 2) 87°.

499. Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо інший його гострий кут дорівнює:

1) 75°; 2) 23°.

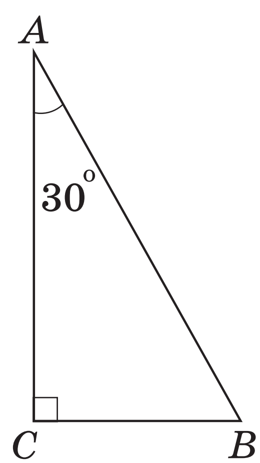
2 **500**. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

501. У рівнобедреному трикутнику один з кутів при основі дорівнює 45°. Чи можна стверджувати, що цей трикутник прямокутний?

502. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 30°$ (мал. 19.8). Знайдіть:

1) BC, якщо $AB = 14$ см;

2) AB, якщо $BC = 5$ дм.

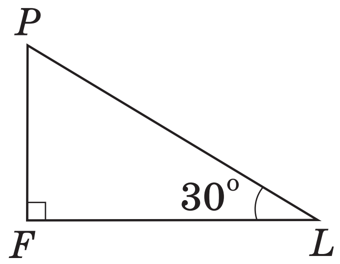


Мал. 19.8

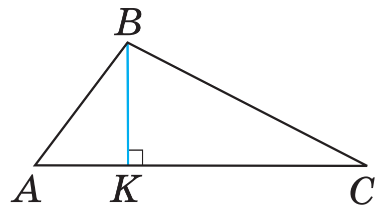
503. У прямокутному трикутнику PFL ($\angle F = 90°$) $\angle L = 30°$ (мал. 19.9). Знайдіть:

1) PF, якщо $PL = 12$ дм;

2) PL, якщо $PF = 4$ см.



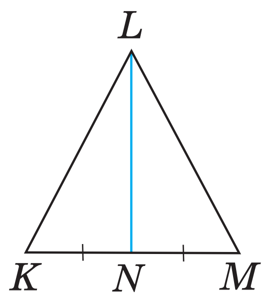
Мал. 19.9



Мал. 19.10

504. На малюнку 19.10 BK – висота трикутника ABC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle ABK = 36°$, $\angle KBC = 64°$.

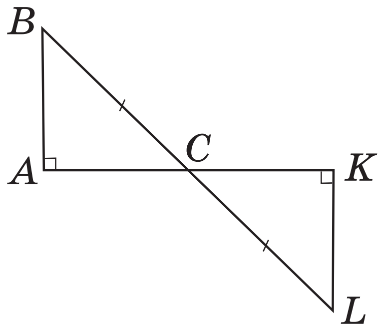
505. На малюнку 19.11 KLM – рівнобедрений трикутник з основою KM, LN – його медіана. Знайдіть кути трикутника KLM, якщо $\angle KLN = 31°$.



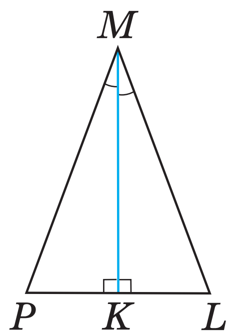
Мал. 19.11

506. На малюнку 19.12 $AB \perp AC$, $KL \perp CK$, $BC = CL$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle KLC$.

507. На малюнку 19.13 $MK \perp PL$, $\angle PMK = \angle LMK$. Доведіть, що $\triangle MPK = \triangle MLK$.



Мал. 19.12



Мал. 19.13

508. Розв'яжіть задачі, подані в таблиці, та прочитайте прізвище. Хто з відомих українців має таке прізвище? За потреби використовуйте інтернет.

У трикутнику *ABC* кут *C* – прямий. Знайдіть градусні міри кутів *A* і *B*, якщо	$\angle A$	$\angle B$
кут *A* на 28° більший за кут *B*	Т	О
кут *A* у 5 разів менший від кута *B*	К	Н
$\angle A : \angle B = 2 : 3$	Е	С

15°	31°	54°	59°	36°	75°	15°	31°

509. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один з них у 4 рази більший за другий;
2) один з них на 16° менший від другого;
3) їхні градусні міри відносяться як 5 : 4.

510. Знайдіть менший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута трикутника з гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює 26°.

511. Знайдіть більший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута трикутника з гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює 68°.

512. Доведіть, що точка, яка лежить у внутрішній області кута і рівновіддалена від його сторін, належить бісектрисі цього кута.

513. Кут між висотою прямокутного трикутника, проведеною до гіпотенузи, і одним з катетів дорівнює 32°. Знайдіть гострі кути трикутника.

514. Один з кутів, утворених при перетині бісектрис прямого і гострого кутів трикутника, дорівнює 115°. Знайдіть гострі кути цього трикутника.

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 36 09.07.2024 12:51:19

4 **515**. Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо відповідно рівні їхні бічні сторони і висоти, проведені до основ.

516. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60°, а сума гіпотенузи і меншого катета – 30 см. Знайдіть довжину гіпотенузи та медіани, що проведена до неї.

517. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а бісектриса цього кута – 4 см. Знайдіть довжину катета, що лежить проти цього кута.

518. Різниця градусних мір двох зовнішніх кутів при вершинах гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 20°. Знайдіть гострі кути трикутника.

519. Знайдіть градусні міри гострих кутів прямокутного трикутника, якщо градусні міри їхніх зовнішніх кутів відносяться як 2 : 3.

Вправи для повторення

520. Доведіть, що коли медіана трикутника ділить його на два трикутники з однаковими периметрами, то хоча б два кути трикутника між собою рівні.

521. Один з кутів трикутника на 20° менший від другого і втричі менший від третього. Знайдіть кожний з кутів трикутника.

522. У рівнобедреному трикутнику основа більша за бічну сторону на 3 см, але менша від суми бічних сторін на 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

Життєва математика

523. 1 м^2 лінолеуму коштує 130 грн. Виміряйте розміри однієї з кімнат вашого будинку (квартири) та знайдіть площу цієї кімнати. Скільки потрібно заплатити за лінолеум для цієї кімнати?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

524. Накресліть довільний $\triangle ABC$, виміряйте довжини трьох його сторін. Порівняйте суму довжин кожної пари сторін із третьою стороною. Зробіть висновки.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

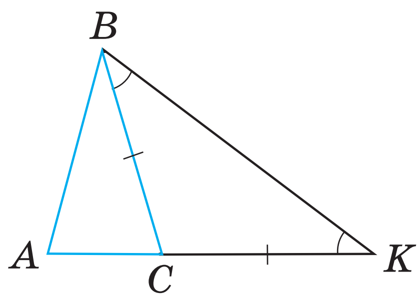
525. Позначте вісім точок і сполучіть їх відрізками так, щоб жодні два з них не перетиналися і з кожної точки виходило по чотири відрізки.

§ 20. Нерівність трикутника

Розглянемо важливу властивість сторін трикутника.

> **Т** Теорема (нерівність трикутника).
> **Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.**

Доведення. Розглянемо довільний $\triangle ABC$ і доведемо, що його сторона, наприклад AB, менша від суми двох інших сторін AC і CB.



1) Відкладемо на продовженні сторони AC відрізок CK, що дорівнює стороні BC (див. мал.). Тоді $\triangle BCK$ – рівнобедрений, і тому $\angle CBK = \angle CKB$.

2) $\angle ABK > \angle CBK$, тому $\angle ABK > \angle AKB$. Оскільки в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, то $AB < AK$. Але $AK = AC + CK = AC + BC$. Отже, $AB < AC + BC$.

Аналогічно можна довести, що $AC < AB + BC$, $BC < AB + AC$. Теорему доведено. ■

Н Наслідок. **Кожна зі сторін трикутника більша за різницю двох інших його сторін.**

Доведення. Запишемо нерівність трикутника для трикутника ABC: $AB < AC + BC$. Віднявши від обох її частин, наприклад AC, матимемо: $AB - AC < BC$. Таку дію можна виконати, використовуючи властивості нерівностей, які розглядатимуться в курсі алгебри. Отже, $BC > AB - AC$. Аналогічно: $AC > BC - AB$, $AB > BC - AC$. ■

Оскільки, наприклад, $BC > AB - AC$ і $BC > AC - AB$, то, узагальнюючи, отримаємо $BC > |AB - AC|$.

З теореми про нерівність трикутника та наслідку з неї отримаємо важливе співвідношення між сторонами трикутника:

кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін, але більша за модуль їх різниці.

Наприклад, $|AB - AC| < BC < AB + AC$.

Приклад 1. Дві сторони трикутника дорівнюють 0,7 см і 1,7 см. Знайти довжину третьої сторони, якщо її довжина дорівнює цілому числу сантиметрів.

Розв'язання. Нехай невідома сторона трикутника дорівнює a см. Тоді $1{,}7 - 0{,}7 < a < 1{,}7 + 0{,}7$, тобто $1 < a < 2{,}4$. Оскільки a – ціле число, то $a = 2$ (см).

Відповідь: 2 см.

Приклад 2. Периметр рівнобедреного трикутника 60 см, а дві його сторони відносяться як 2 : 5. Знайти сторони трикутника.

Розв'язання. Позначимо сторони трикутника, відношення яких 2 : 5, як $2x$ см і $5x$ см. Оскільки невідомо, яка з них – основа, а яка – бічна сторона, розглянемо два випадки.

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 39 09.07.2024 12:51:20

1. Основа дорівнює $5x$ см, а бічні сторони – по $2x$ см. Але тоді $2x + 2x < 5x$, що суперечить нерівності трикутника, тобто трикутника зі сторонами $2x$, $2x$ і $5x$ не існує.
2. Основа дорівнює $2x$ см, а бічні сторони – по $5x$ см. Для цього випадку нерівність трикутника виконується.
Отже, за умовою задачі маємо рівняння:

$$2x + 5x + 5x = 60,\ x = 5\ (\text{см}).$$

Тоді $2 \cdot 5 = 10$ (см) – основа, $5 \cdot 5 = 25$ (см) – бічна сторона.
Відповідь: 10 см; 25 см; 25 см.

? Сформулюйте теорему про нерівність трикутника та наслідок з неї.
• Якими співвідношеннями пов'язані між собою сторони трикутника?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

526. Чи існує трикутник зі сторонами:
1) 1 см, 2 см і 4 см;
2) 7 дм, 6 дм і 5 дм;
3) 3 см, 4 см і 7 см?

527. Чи існує трикутник зі сторонами:
1) 2 дм, 5 дм і 7 дм; 2) 2 см, 3 см і 6 см;
3) 5 дм, 2 дм і 4 дм?

2

528. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,8 см і 8,4 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

529. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 4,3 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

530. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:
1) 2, 3, 4; 2) 7, 8, 15; 3) 5, 3, 7?

531. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:

1) 5, 1, 4; 2) 5, 6, 7; 3) 8, 2, 11?

3 **532.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Чи може бічна сторона цього трикутника дорівнювати 3 см?

533. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 11 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

534. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,5 см і 1,2 см. Яким може бути периметр трикутника, якщо довжина третьої сторони дорівнює цілому числу сантиметрів?

535. Периметр трикутника дорівнює 30 см. Чи може одна з його сторін дорівнювати:

1) 14 см; 2) 15 см; 3) 16 см?

536. Периметр трикутника дорівнює 40 дм. Чи може одна з його сторін дорівнювати:

1) 21 дм; 2) 20 дм; 3) 19 дм?

4 **537.** Чи існує трикутник з периметром 20 см, одна сторона якого на 2 см більша за другу і на 4 см менша від третьої?

538. Чи існує трикутник з периметром 23 см, одна сторона якого на 6 см менша від другої і на 1 см більша за третю?

Вправи для повторення

539. Знайдіть кути трикутника *ABC*, якщо кут *A* втричі менший від кута *B* і на 15° більший за кут *C*.

540. Доведіть, що два прямокутних трикутники між собою рівні, якщо висота, проведена до гіпотенузи, і катет одного трикутника дорівнюють відповідно висоті, проведеній до гіпотенузи, і катету другого трикутника.

Життєва математика

541. Циферблат морських компасів поділено на 32 рівні частини, які називають румбами. Скільки градусів становлять 4 румби?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

542. Накресліть коло із центром у точці *O*, радіус якого дорівнює 25 мм. Проведіть діаметр кола *AB* та позначте точку *M*, що належить колу.

1) Виміряйте довжину діаметра *AB* та порівняйте її з радіусом.
2) Виміряйте градусну міру кута *AMB*.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

543. Коник-стрибунець може переміщуватися вздовж даної прямої на 4 см або 6 см (у будь-який бік). Чи зможе він за кілька стрибків опинитися в точці, що міститься від початкової на відстані:

1) 2024 см;
2) 2025 см?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4 (§§ 17–20)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Три кути трикутника можуть дорівнювати…

А. 20°, 20° і 150° **Б.** 30°, 100° і 40°
В. 50°, 60° і 70° **Г.** 60°, 60° і 61°

2. У $\triangle ABC$ $AB > AC$. Порівняйте $\angle B$ і $\angle C$ цього трикутника.

А. $\angle B < \angle C$ **Б.** $\angle B = \angle C$
В. $\angle B > \angle C$ **Г.** порівняти неможливо

3. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює 40°.

А. 30° **Б.** 40° **В.** 50° **Г.** 60°

2 **4.** Один з кутів трикутника дорівнює 72°. Знайдіть суму двох інших кутів трикутника.

А. 98° **Б.** 108° **В.** 118° **Г.** знайти неможливо

5. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Знайдіть кут при основі цього трикутника.

А. 40° **Б.** 50° **В.** 60° **Г.** 70°

6. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 4,2 см. Якому цілому числу сантиметрів НЕ може дорівнювати третя сторона трикутника?

А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 6 см **Г.** 8 см

3 **7.** Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 30° менший від другого, а гіпотенуза трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть менший з його катетів.

А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 5 см **Г.** 6 см

8. У трикутнику два кути дорівнюють 60° і 50°. Знайдіть кут між прямими, що містять бісектриси цих кутів.

А. 125° **Б.** 115°
В. 65° **Г.** 55°

9. Периметр трикутника дорівнює 16 см. Якою НЕ може бути довжина однієї з його сторін?

А. 8 см **Б.** 7,5 см
В. 7 см **Г.** 2 см

4 **10**. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює основі цього трикутника. Знайдіть кут при основі цього трикутника.

А. 60° **Б.** 72°
В. 84° **Г.** 96°

11. Зовнішні кути трикутника відносяться як 3 : 5 : 7. Знайдіть менший з внутрішніх кутів трикутника.

А. 12° **Б.** 24°
В. 60° **Г.** інша відповідь

12. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60°, а сума меншого катета і медіани, проведеної до гіпотенузи, дорівнює 10 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

А. 6 см **Б.** 8 см
В. 10 см **Г.** 15 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13**. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 40°. Установіть відповідність між кутами (1–3) та їхніми градусними мірами (А–Г).

Кути	*Градусні міри*
1. Кут, що утворює висота трикутника, проведена до гіпотенузи, із більшим катетом.	**А.** 45°
2. Менший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута з гіпотенузою.	**Б.** 50°
3. Кут між прямими, що містять бісектриси прямого і меншого гострого кута трикутника.	**В.** 65°
	Г. 85°

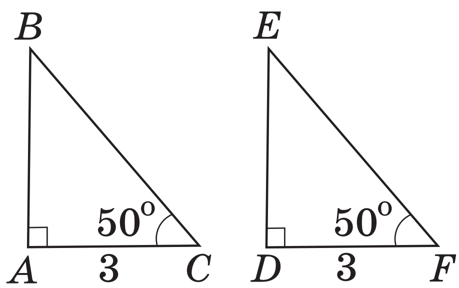
Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 44 09.07.2024 12:51:21

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 17–20

1 **1**. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два з його кутів дорівнюють 30° і 80°.

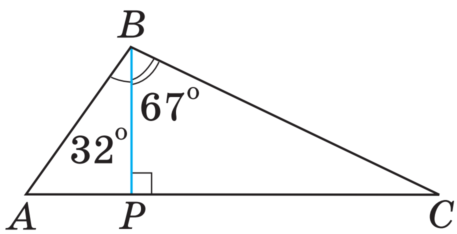
2. Накресліть $\triangle PLK$ та його зовнішній кут при вершині P.

3. За якими елементами рівні між собою прямокутні трикутники, зображені на малюнку? Запишіть відповідні рівності.



2 **4**. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 71°. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

5. На малюнку BP – висота трикутника ABC, $\angle ABP = 32°$, $\angle PBC = 67°$. Знайдіть кути трикутника ABC.



6. Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 6,3 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

3 **7**. Один з кутів трикутника вдвічі менший від другого і на 16° більший за третій. Знайдіть кути трикутника.

8. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 112°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться як 3 : 5.

4 **9**. У прямокутному трикутнику BCD $\angle C = 90°$, BM – бісектриса трикутника, $\angle CBD = 60°$. Знайдіть довжину катета CD, якщо $CM = 8$ см.

Додаткові вправи

10. Зовнішні кути трикутника відносяться як 4 : 5 : 6. Знайдіть відношення внутрішніх кутів трикутника.

11. Чи існує трикутник з периметром 23 см, одна сторона якого на 3 см більша за другу і на 5 см менша від третьої?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 11

544. Накресліть прямокутний $\triangle KLP$. Запишіть назви вершин, сторін та кутів цього трикутника.

545. Одна сторона трикутника дорівнює 18 см, друга сторона на 6 см більша за першу, а третя сторона вдвічі менша від другої. Знайдіть периметр трикутника.

546. За допомогою транспортира та лінійки з поділками накресліть $\triangle MLP$, у якого $ML = 5$ см, $\angle M = 40^\circ$, $\angle L = 80^\circ$.

547. Одна сторона трикутника вдвічі менша від другої, а третя – становить 80 % від другої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

548. Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $AB + AC = 12$ см, $AC + CB = 15$ см, $AB + BC = 13$ см.

До § 12

549. 1) Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см. Знайдіть сторони рівного йому трикутника.

2) Кути трикутника дорівнюють 40°, 60° і 80°. Знайдіть кути рівного йому трикутника.

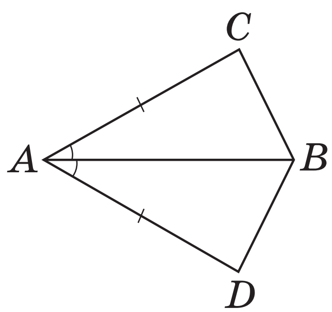
550. Чи можна сумістити накладанням вертикальні кути?

551. Чи можуть бути рівними трикутники, найбільші сторони яких не є рівними?

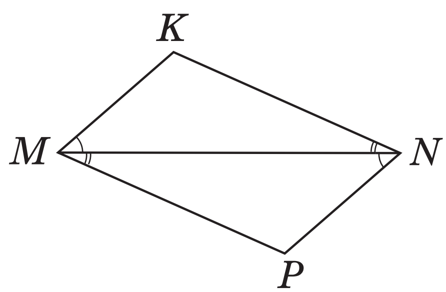
552. Дано: $\triangle ABC = \triangle ACB$, $AB = 7$ см, $BC = 4$ см. Знайти: P_{ABC}.

До § 13

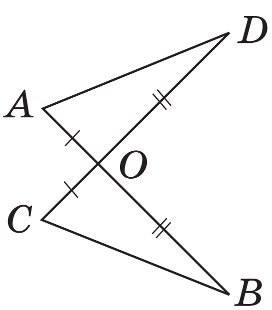
553. Назвіть спільний елемент трикутників, зображених на малюнках 1 та 2, і ознаку, за якою ці трикутники рівні.



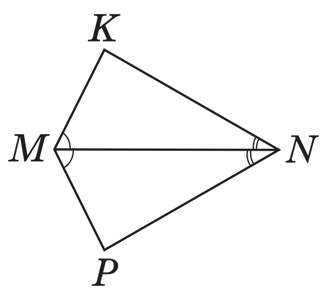
Мал. 1



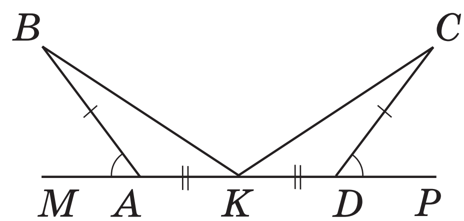
Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4



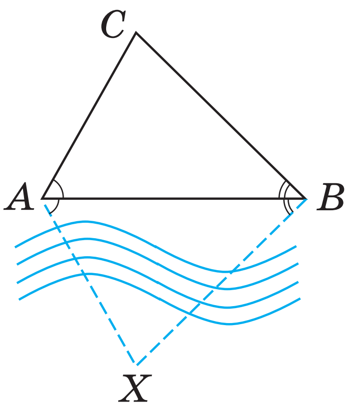
Мал. 5

554. Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle COB$ (мал. 3), якщо $AO = CO$, $DO = OB$.

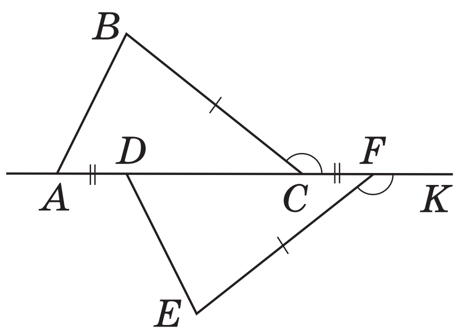
555. Доведіть, що $\triangle MKN = \triangle MPN$ (мал. 4), якщо $\angle KMN = \angle PMN$ і $\angle KNM = \angle PNM$.

556. На малюнку 5 $\angle MAB = \angle PDC$, $BA = CD$, $AK = KD$. Доведіть, що $BK = KC$.

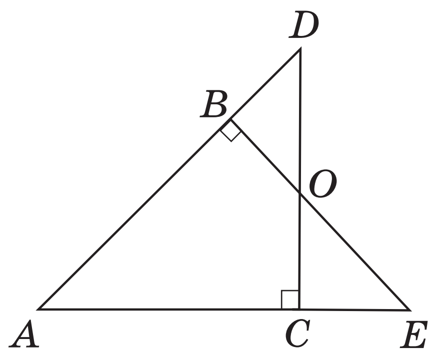
557. Щоб знайти відстань від пункту A до недосяжного пункту X (мал. 6), на березі позначають точки B і C так, щоб $\angle XAB = \angle CAB$ і $\angle XBA = \angle CBA$. Тоді $AX = AC$. Чому?



Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8

558. На малюнку 7 зображено фігуру, у якої $BC = EF$, $AD = CF$, $\angle BCF = \angle EFK$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.

559. На сторонах кута A позначено точки B і C так, що $AB = AC$. $DC \perp AE$, $BE \perp AD$ (мал. 8). Доведіть, що:

1) $BD = CE$;

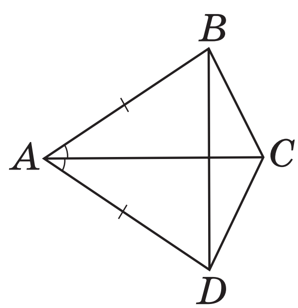
2) AO – бісектриса кута A.

До § 14

560. AK – основа рівнобедреного трикутника AKP.

1) $AP = 5$ см. Знайдіть PK.

2) $\angle A = 70°$. Знайдіть $\angle K$.



Мал. 9

561. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона – 4 см. Знайдіть периметр трикутника.

562. На малюнку 9 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle CAD$. Доведіть, що $\triangle BCD$ – рівнобедрений.

563. Основа і прилеглий до неї кут одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі та прилеглому до неї куту іншого рівнобедреного трикутника. Чи будуть рівними між собою ці трикутники?

564. Основа та бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться як 3 : 4. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 88 см.

565. $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$ рівнобедрені зі спільною основою AB. Точки C і D лежать по різні боки від прямої AB. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle BCD$.

До § 15

566. Як називають у трикутнику:

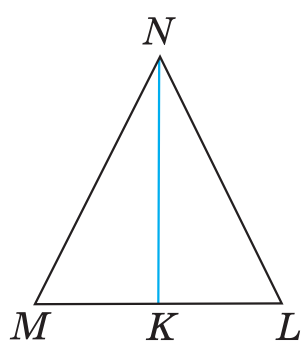
1) відрізок, що сполучає його вершину із серединою протилежної сторони;

2) перпендикуляр, проведений з його вершини до прямої, що містить протилежну сторону;

3) відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони?

567. Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 5 см. Знайдіть висоту цього трикутника, проведену до основи; медіану цього трикутника, проведену до основи.

568. На малюнку 10 відрізок NK – медіана рівнобедреного трикутника MNL з основою ML. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.

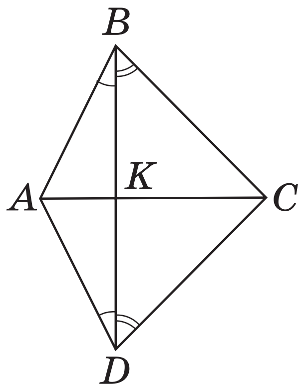


Мал. 10

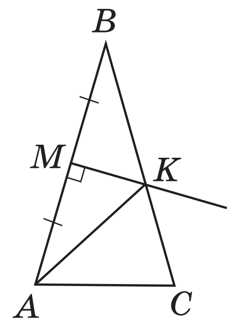
569. AM і A_1M_1 – відповідно медіани рівних між собою трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.

570. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику будь-яка точка проведеної до основи висоти рівновіддалена від кінців основи трикутника.

571. На малюнку 11 $\angle ABD = \angle ADB$, $\angle CBD = \angle CDB$. Доведіть, що $BD \perp AC$.



Мал. 11

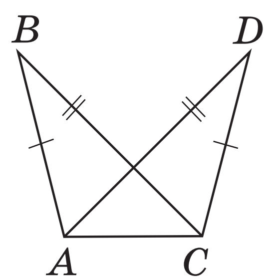


Мал. 12

572. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = a$ см. З точки M – середини AB – проведено перпендикуляр до AB, який перетинає BC в точці K (мал. 12). Знайдіть довжину сторони AC та периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника AKC дорівнює b см ($b > a$).

До § 16

573. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 13), якщо $AB = CD$, $BC = AD$.



Мал. 13

574. Сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні іншого рівностороннього трикутника. Чи можна стверджувати, що трикутники рівні між собою?

575. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.

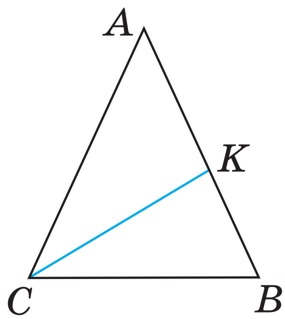
До § 17

576. Знайдіть кут *C* трикутника *ABC*, якщо:
1) $\angle A = 65°$, $\angle B = 29°$; 2) $\angle A = 37°$, $\angle B = 116°$.

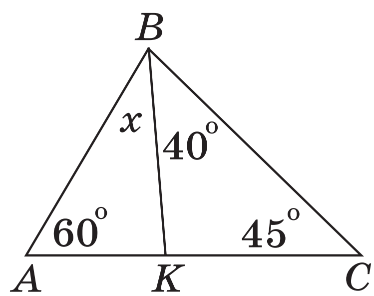
577. На малюнку 14 *CK* – бісектриса рівнобедреного трикутника *ABC* з основою *CB*. Знайдіть:
1) $\angle A$, якщо $\angle KCB = 32°$;
2) $\angle ACK$, якщо $\angle A = 56°$.

578. Визначте вид трикутника *ABC* за сторонами, якщо $\angle A = 76°$, $\angle B = 28°$.

579. За малюнком 15 знайдіть градусну міру кута *x*.



Мал. 14



Мал. 15

580. Один з кутів трикутника дорівнює 60°, а два інших відносяться як 2 : 3. Знайдіть ці кути.

581. Знайдіть кут між двома прямими, що містять медіани рівностороннього трикутника.

582. Бісектриса одного з кутів трикутника утворює з висотою, проведеною з тієї самої вершини, кут 16°, а менший з двох інших кутів трикутника дорівнює 50°. Знайдіть невідомі кути трикутника.

583. Знайдіть градусну міру кута трикутника, якщо він:
1) дорівнює $\frac{1}{5}$ від суми градусних мір двох інших кутів;
2) на 40° менший від суми двох інших кутів.

584. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено бісектрису AK. Знайдіть:
1) $\angle B$, якщо $\angle AKB = 60°$;
2) $\angle C$, якщо $\angle AKC = 111°$.

До § 18

1 **585**. Накресліть $\triangle MNK$ та по одному зовнішньому куту при кожній вершині цього трикутника.

2 **586**. Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 150°. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

587. Один з кутів трикутника дорівнює 80°. Чи може зовнішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнювати:
1) 102°; 2) 80°; 3) 75°?

3 **588**. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 115° і 137°. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

589. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник – рівнобедрений.

590. Два внутрішніх кути трикутника відносяться як 2 : 3, а зовнішній кут третього кута дорівнює 140°. Знайдіть кути трикутника.

4 **591**. Сума внутрішніх кутів рівнобедреного трикутника разом з одним із зовнішніх кутів дорівнює 260°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника.

592. Доведіть, що не існує трикутника, у якому зовнішні кути при кожній з вершин більші за 120°.

* **593**. Внутрішній кут трикутника дорівнює різниці зовнішніх кутів, не суміжних з ним. Доведіть, що трикутник – прямокутний.

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 52 09.07.2024 12:51:25

До § 19

594. Укажіть умови, з яких випливає рівність двох прямокутних трикутників:

1) катет одного трикутника дорівнює катету другого трикутника;

2) катет і прилеглий до нього гострий кут одного трикутника дорівнює катету і прилеглому до нього гострому куту другого трикутника;

3) два гострих кути одного трикутника дорівнюють двом гострим кутам другого;

4) катет і гіпотенуза одного трикутника дорівнюють катету і гіпотенузі другого.

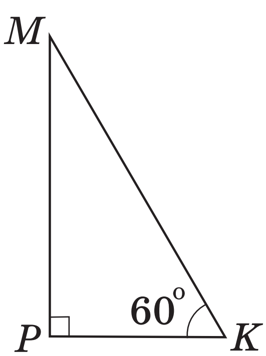
595. У прямокутному трикутнику MKP $\angle K = 60°$ (мал. 16). Знайдіть:

1) $\angle M$;

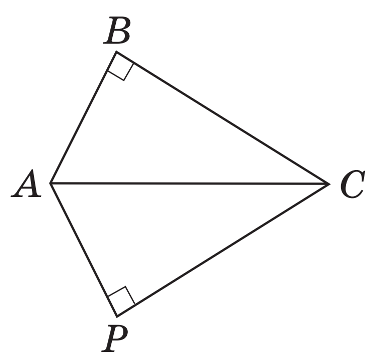
2) PK, якщо $MK = 24$ см;

3) MK, якщо $PK = 30$ мм.

596. На малюнку 17 $\angle B = \angle P = 90°$, CA – бісектриса кута C. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle APC$.



Мал. 16



Мал. 17

597. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 7 : 3.

598. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведено бісектрису і висоту, кут між якими 15°. Знайдіть гострі кути трикутника.

599. У прямокутному трикутнику ABC $AC = BC$. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 5 см.

600. Знайдіть кут між бісектрисами гострих кутів прямокутного трикутника.

4 **601.** У прямокутному трикутнику катет 24 см завдовжки прилягає до кута 30°. Знайдіть бісектрису другого гострого кута трикутника.

602. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а висота, проведена до бічної сторони, – a см. Знайдіть основу трикутника.

603. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 10 см і ділить прямий кут у відношенні 1 : 2. Знайдіть гіпотенузу та менший катет трикутника.

* **604.** Доведіть, що в нерівнобедреному прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить кут між висотою і медіаною, проведеними з тієї самої вершини, навпіл.

До § 20

1 **605.** Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см. Чи може третя сторона трикутника дорівнювати:

1) 2 см;	2) 3 см;	3) 6 см;
4) 10 см;	5) 13 см;	6) 15 см?

2 **606.** Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 8,7 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона і якому найбільшому?

3 **607.** На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено точки D і E, причому точка D – середина AB, $AE = 6$ см, $DE = 4$ см. Чи може довжина сторони AB дорівнювати 21 см?

608. Знайдіть сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють:

1) 4 см і 7 см; 2) 5 см і 2 см; 3) 12 см і 6 см.

4 **609.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 51 см, а дві його сторони відносяться як 3 : 7. Знайдіть сторони трикутника.

Головне в розділі 3

✓ **Трикутник** – фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.

✓ Геометричні фігури – ***рівні між собою***, якщо їх можна сумістити накладанням.

Перша ознака рівності трикутників. **Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

Друга ознака рівності трикутників. **Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

Третя ознака рівності трикутників. **Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

✓Трикутник **рівнобедрений**, якщо в нього дві сторони рівні.

✓Трикутник, усі сторони якого мають різні довжини, – **різносторонній**.

✓Трикутник **рівносторонній**, якщо в нього всі сторони рівні.

ВЛАСТИВІСТЬ КУТІВ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

ОЗНАКА РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Якщо в трикутнику два кути між собою рівні, то він рівнобедрений.

✓**Медіана** трикутника – відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

✓**Бісектриса** трикутника – відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.

✓**Висота** трикутника – перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

✓**Зовнішній кут трикутника** – кут, суміжний з кутом цього трикутника.

ВЛАСТИВІСТЬ ЗОВНІШНЬОГО КУТА ТРИКУТНИКА

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

У трикутнику:
1) проти більшої сторони лежить більший кут;
2) проти більшого кута лежить більша сторона.

✓Сторона **прямокутного трикутника**, яка лежить проти прямого кута, – ***гіпотенуза***, а дві інші сторони – ***катети***.

ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.
2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.
3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.
4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.
5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

✓Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні між собою.

- ✓ Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні між собою.

НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

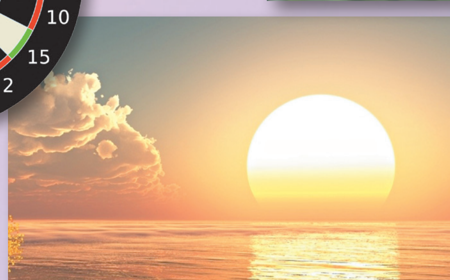
Кожна зі сторін трикутника більша за різницю двох інших його сторін.

Розділ 4

КОЛО І КРУГ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** поняття кола, круга та їхніх елементів;
- **ознайомитеся** з поняттями дотичної до кола, серединного перпендикуляра до відрізка, кола, описаного навколо трикутника, і кола, вписаного в трикутник, центрального та вписаного кута; поняттям геометричного місця точок;
- **навчитеся** застосовувати означення та властивості до розв'язування задач.



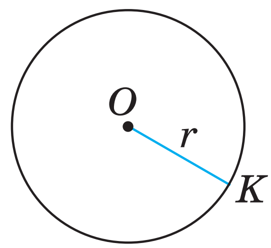
§ 21. Коло і круг

Коло та його елементи

Колом **називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки.**

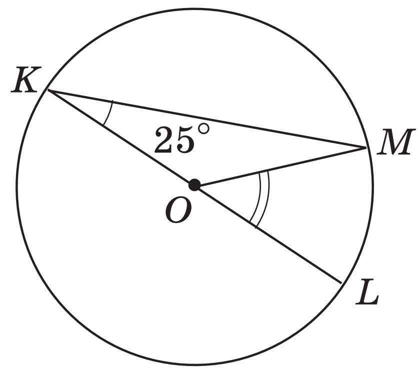
Цю точку називають *центром* кола. Відрізок, що сполучає центр з будь-якою точкою кола, називають ***радіусом***.

На малюнку зображено коло із центром у точці O і радіусом OK. З означення кола випливає, що всі радіуси одного й того самого кола мають однакову довжину. Радіус кола зазвичай позначають буквою r.



Приклад. Дано: O – центр кола, $\angle LKM = 25°$ (див. мал.). Знайти: $\angle MOL$.

Розв'язання.

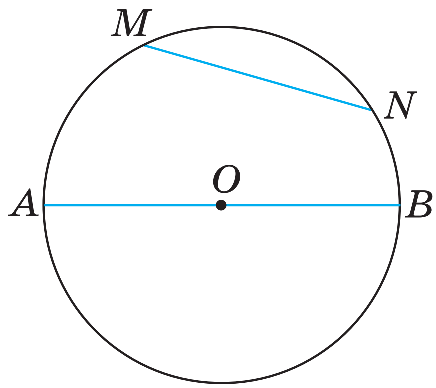


1) Оскільки точка O – центр кола, то $OK = OM$ (як радіуси). Тоді $\triangle KOM$ – рівнобедрений, отже, $\angle M = \angle K = 25°$.

2) $\angle MOL$ – зовнішній для $\triangle KOM$, тому за властивістю зовнішнього кута $\angle MOL = \angle K + \angle M = 2 \cdot 25° = 50°$.

Відповідь: 50°.

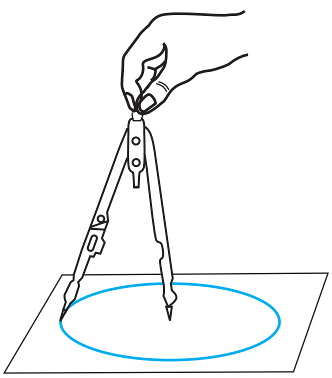
Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають ***хордою***. Хорду, що проходить через центр кола, називають ***діаметром***. На малюнку 21.1 відрізок MN є хордою кола, а відрізок AB – його діаметром. Оскільки $AB = OA + OB$, приходимо до висновку, що довжина діаметра вдвічі більша за довжину радіуса.



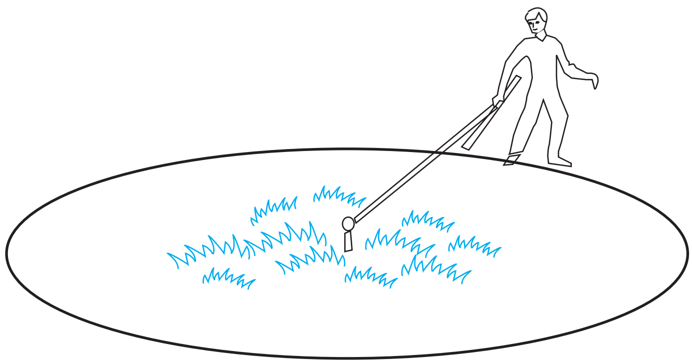
Мал. 21.1

> **!** Діаметр кола зазвичай позначають буквою d. Отже, $d = 2r$. Крім того, центр кола є серединою будь-якого діаметра.

Коло на папері зображують за допомогою циркуля (мал. 21.2). На місцевості для побудови кола можна використати мотузку (мал. 21.3).



Мал. 21.2

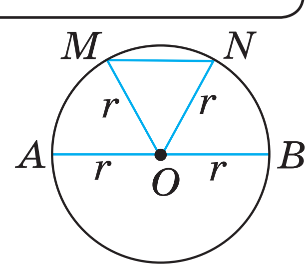


Мал. 21.3

Властивості елементів кола

Розглянемо деякі властивості елементів кола.

> **Т** Теорема 1 (про порівняння діаметра і хорди). **Діаметр є найбільшою з хорд.**



Доведення. Нехай AB – довільний діаметр кола, радіус якого дорівнює r, а MN – відмінна від діаметра хорда кола (див. мал.). Доведемо, що $AB > MN$.

$AB = 2r$. У трикутнику MON, використовуючи нерівність трикутника, маємо $MN < MO + ON$. Отже, $MN < 2r$. Тому $AB > MN$. Теорему доведено. ■

Нехай точка P не належить відрізку AB. Тоді кут APB називають ***кутом, під яким відрізок AB видно з точки P*** (мал. 21.4).

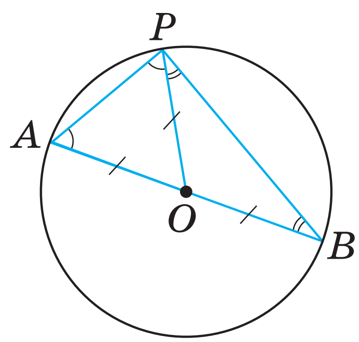
> **Т** Теорема 2 (про кут, під яким видно діаметр з точки кола).
> **Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.**

Доведення. Нехай AB – діаметр кола, а P – довільна точка кола (мал. 21.4). Доведемо, що $\angle APB = 90°$.

1) У трикутнику AOP $AO = PO$ (як радіуси). Тому $\triangle AOP$ – рівнобедрений і $\angle OAP = \angle OPA$.

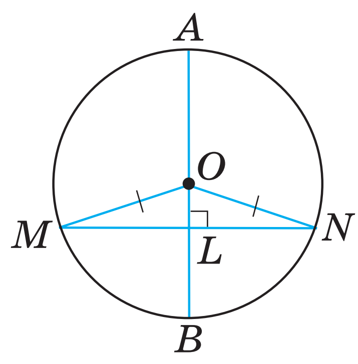
2) Аналогічно $\angle OPB = \angle OBP$.

3) Отже, $\angle APB = \angle A + \angle B$. Але ж у $\triangle APB$: $\angle APB + \angle A + \angle B = 180°$. Тому $\angle APB + \angle APB = 180°$; $2\angle APB = 180°$; $\angle APB = 90°$. Теорему доведено. ■



Мал. 21.4

> **Т** Теорема 3 (властивість діаметра кола, перпендикулярного до хорди).
> **Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.**



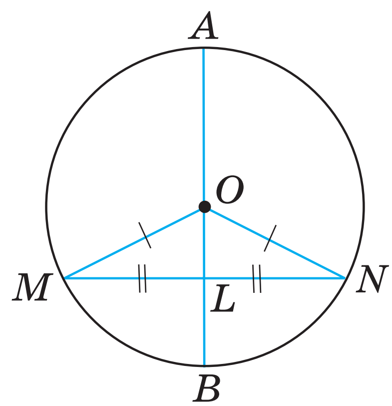
Доведення. Нехай AB – діаметр кола, MN – відмінна від діаметра хорда кола, $AB \perp MN$ (див. мал.). Доведемо, що $ML = LN$, де L – точка перетину AB і MN.

$\triangle$ *MON* – рівнобедрений, бо $MO = ON$ (як радіуси), *OL* – його висота, проведена до основи. Тому *OL* є також і медіаною. Отже, $ML = LN$.

Якщо хорда *MN* є діаметром кола, то твердження теореми є очевидним. Теорему доведено. ■

Теорема 4 (властивість діаметра кола, що проходить через середину хорди).
Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

Доведення. Нехай діаметр *AB* проходить через точку *L* – середину хорди *MN*, яка не є діаметром кола (див. мал.). Доведемо, що $AB \perp MN$.



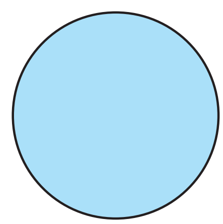
$\triangle$ *MON* – рівнобедрений, бо $MO = NO$ (як радіуси). *OL* – медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи. Тому *OL* є також висотою. Отже, $OL \perp MN$, а тому і $AB \perp MN$. Теорему доведено. ■

Круг та його елементи

Коло разом з його внутрішньою областю називають *кругом*.

На малюнку 21.5 зображено круг.

Центром, *радіусом*, *діаметром*, *хордою круга* називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке є межею цього круга.



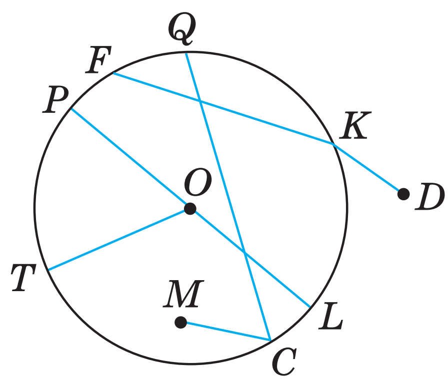
Мал. 21.5

? Що називають колом; центром кола; радіусом кола? • Який відрізок називають хордою кола, а який – діаметром кола? • Що називають кругом? • Сформулюйте та доведіть теореми про властивості елементів кола.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

610. (*Усно*.) Точка *O* – центр кола (мал. 21.6). Які з відрізків на малюнку є: 1) хордами кола; 2) діаметрами кола; 3) радіусами кола?



Мал. 21.6

611. Знайдіть на малюнку 21.6 хорду, що проходить через центр кола. Як називають таку хорду?

612. Обчисліть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:
1) 4 см; 2) 3,7 дм.

613. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:
1) 7 мм; 2) 4,8 см.

614. Знайдіть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:
1) 8 дм; 2) 2,6 см.

615. Обчисліть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:
1) 18 см; 2) 3,8 дм.

2

616. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр *MN* та хорду *MK*. Знайдіть $\angle NKM$.

617. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3,6 см. Проведіть у ньому діаметр *AB* та хорду *BD*. Перевірте за допомогою косинця чи транспортира, що $\angle BDA$ – прямий.

618. Усередині кола взято довільну точку, відмінну від центра. Скільки діаметрів і скільки хорд можна провести через цю точку?

619. На колі взято довільну точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна через неї провести?

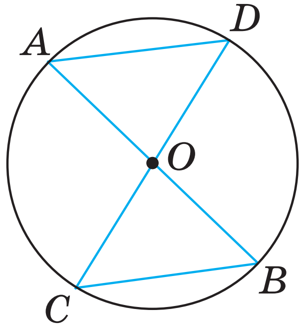
620. Радіус кола дорівнює 5 см. Чи може хорда цього кола дорівнювати:

1) 2 см; 2) 5 см; 3) 7 см;
4) 9,8 см; 5) 10,2 см; 6) 1 дм?

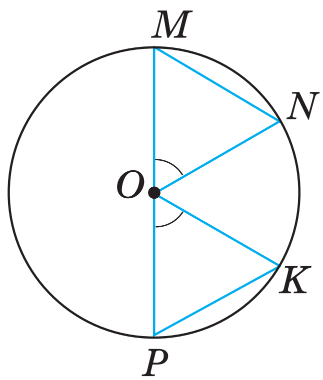
621. Радіус кола дорівнює 4 дм. Чи може хорда цього кола дорівнювати:

1) 1 дм; 2) 4 дм; 3) 6,7 дм;
4) 7,95 дм; 5) 8,3 дм; 6) 1 м?

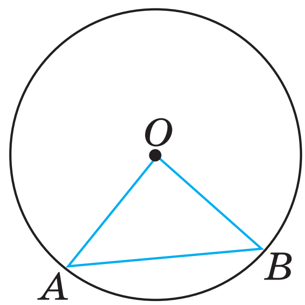
622. У колі проведено діаметри AB і CD (мал. 21.7). Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle BOC$.



Мал. 21.7



Мал. 21.8



Мал. 21.9

623. У колі із центром O проведено хорди MN і PK та діаметр PM. $\angle POK = \angle MON$ (мал. 21.8). Доведіть, що $\triangle MON = \triangle POK$.

624. На малюнку 21.9 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:

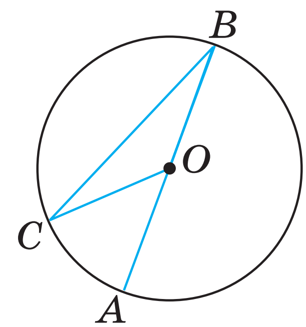
1) кута O, якщо $\angle A = 52°$; 2) кута B, якщо $\angle O = 94°$.

625. На малюнку 21.9 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:

1) кута O, якщо $\angle B = 48°$; 2) кута A, якщо $\angle O = 102°$.

626. На малюнку 21.10 точка O – центр кола, $\angle COA = 32°$. Знайдіть $\angle CBA$.

627. На малюнку 21.10 точка O – центр кола, $\angle BCO = 18°$. Знайдіть $\angle AOC$.

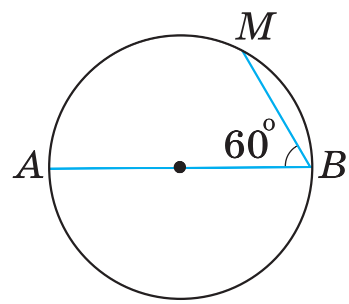


Мал. 21.10

628. Дано коло радіусом 5 см. 1) Проведіть у ньому хорду 6 см завдовжки. Скільки таких хорд можна провести?

2) Точка A належить даному колу. Скільки хорд 6 см завдовжки можна провести з даної точки?

629. У колі на малюнку 21.11 AB – діаметр, $\angle ABM = 60°$, $BM = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.



Мал. 21.11

630. У колі на малюнку 21.11 AB – діаметр, $\angle ABM = 60°$, $AB = 18$ см. Знайдіть довжину хорди MB.

631. Доведіть, що коли хорди рівновіддалені від центра кола, то вони між собою рівні.

632. Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

633. Хорда кола перетинає його діаметр під кутом 30° і ділиться діаметром на відрізки 4 см і 7 см завдовжки. Знайдіть відстань від кінців хорди до прямої, що містить діаметр кола.

Вправи для повторення

634. Побудуйте пряму a, точку M на відстані 3 см від прямої та точку N на відстані 2 см від прямої так, щоб відрізок MN перетинав пряму.

635. Два рівних між собою тупих кути мають спільну сторону, а дві інші сторони взаємно перпендикулярні. Знайдіть градусну міру тупого кута.

636. Доведіть рівність двох гострокутних рівнобедрених трикутників за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

Життєва математика

637. Скільки потрібно робітників для перенесення дубової балки розміром 6,5 м × 30 см × 45 см? Кожен робітник може підняти в середньому 70 кг. Щільність дуба – 810 кг/м^3.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

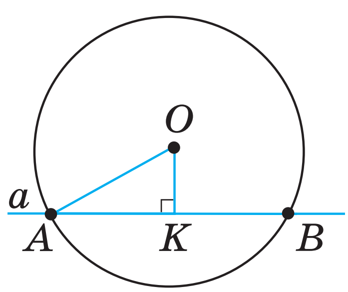
638. У коробці шоколадні цукерки квадратної форми викладено у вигляді квадрата в один шар. Марійка з’їла всі цукерки по периметру квадрата – всього 20 цукерок. Скільки цукерок залишилось у коробці?

§ 22. Дотична до кола, її властивості

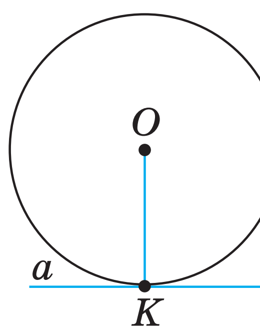
Взаємне розміщення прямої і кола

Розглянемо взаємне розміщення прямої і кола.

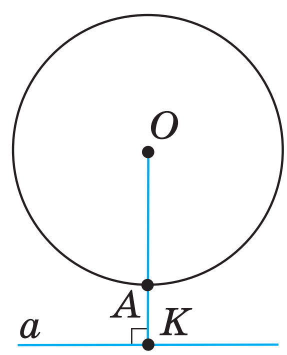
Пряма і коло можуть мати дві спільні точки (мал. 22.1), одну спільну точку (мал. 22.2) або не мати спільних точок (мал. 22.3).



Мал. 22.1



Мал. 22.2



Мал. 22.3

Пряму, яка має дві спільні точки з колом, називають ***січною***. На малюнку 22.1 OK – відстань від центра кола –

точки O – до січної. У прямокутному трикутнику OKA сторона OK є катетом, а AO – гіпотенузою. Тому $OK < OA$. Отже, *відстань від центра кола до січної менша від радіуса*.

Дотичною до кола називають пряму, яка має з колом лише одну спільну точку. Цю точку називають *точкою дотику*.

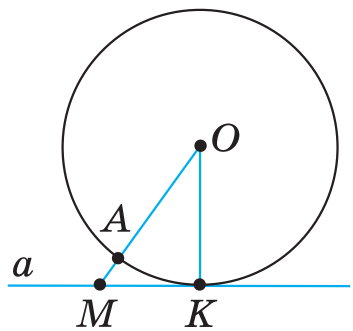
На мал. 22.2 пряма a – дотична до кола, K – точка дотику.

Якщо пряма і коло не мають спільних точок, то відстань OK більша за радіус кола OA (мал. 22.3). *Відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає це коло, більша за радіус*.

Властивість дотичної

Т Теорема 1 (властивість дотичної).
Дотична до кола є перпендикулярною до радіуса, який проведений в точку дотику.

Доведення. Нехай пряма a дотична до кола із центром у точці O, точка K – точка дотику (див. мал.). Доведемо, що $a \perp OK$.

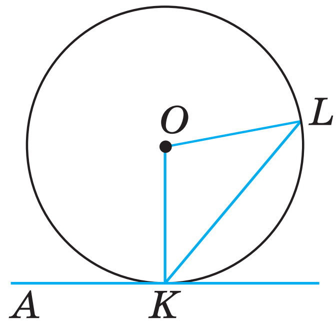


Припустимо, що пряма a не є перпендикулярною до OK. Проведемо з точки O перпендикуляр OM до прямої a. Тоді OM – катет прямокутного трикутника KOM. Оскільки у прямої з колом лише одна спільна точка K, то точка M, що належить прямій a, лежить поза колом. Тому довжина відрізка OM більша за довжину відрізка OA, який є радіусом кола. Оскільки $OA = OK$ (як радіуси), то $OM > OK$. Але, за припущенням, OM – катет прямокутного трикутника KOM, а OK – його гіпотенуза. Прийшли до протиріччя зі співвідношенням між катетом і гіпотенузою прямокутного трикутника (див. § 19, властивість 2).

Отже, наше припущення є неправильним, тому $a \perp OK$. Теорему доведено. ■

Н Наслідок. **Відстань від центра кола до дотичної до цього кола дорівнює радіусу кола.**

Приклад 1. Пряма AK дотикається до кола в точці K (див. мал.). Знайти кут KOL, якщо $\angle AKL = 130°$.



Розв'язання. 1) Оскільки AK – дотична до кола і точка K – точка дотику, то $AK \perp KO$, тобто $\angle AKO = 90°$.

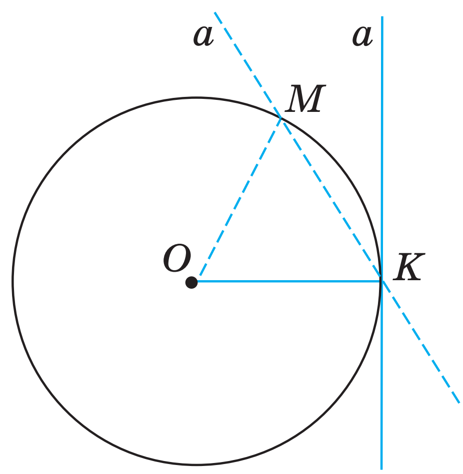
2) $\angle OKL = \angle AKL - \angle AKO = 130° - 90° = 40°$.

3) $OK = OL$ (як радіуси кола), $\triangle OKL$ – рівнобедрений; $\angle L = \angle OKL = 40°$.

4) Тоді $\angle KOL = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$.

Відповідь: 100°.

Т Теорема 2 (обернена до теореми про властивість дотичної). **Якщо пряма проходить через кінець радіуса кола і перпендикулярна до цього радіуса, то ця пряма є дотичною до цього кола.**



Доведення. Нехай OK – радіус кола із центром у точці O. Пряма a проходить через точку K так, що $a \perp OK$ (див. мал.). Доведемо, що a – дотична до кола.

Припустимо, що пряма a має з колом ще одну спільну точку – точку M. Тоді $OK = OM$ (як радіуси) і $\triangle OMK$ – рівнобедрений. $\angle OMK = \angle OKM = 90°$.

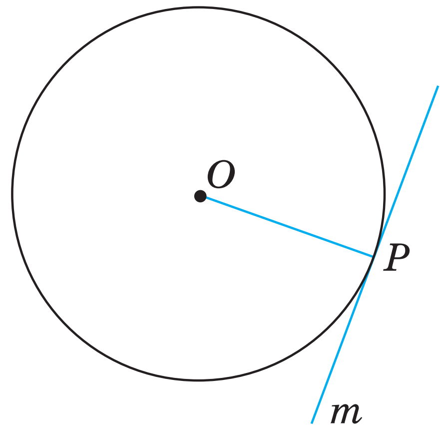
Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 69 09.07.2024 12:51:36

Отримали, що в трикутнику *OMK* є два прямих кути, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

Наше припущення неправильне. Отже, пряма *a* не має інших спільних точок з колом, окрім точки *K*. Тому пряма *a* є дотичною до кола.

Теорему доведено. ■

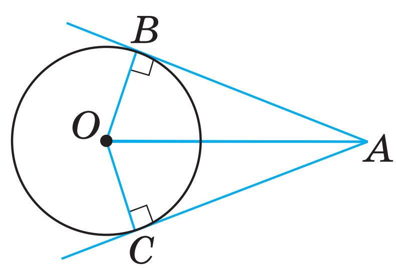
Приклад 2. Через дану точку *P* кола із центром *O* провести дотичну до цього кола (див. мал.).



Розв'язання. Проведемо радіус *OP*, а потім побудуємо пряму *m*, перпендикулярну до радіуса (наприклад, за допомогою косинця). За теоремою 2 пряма *m* є дотичною до кола.

Властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки

Розглянемо дві дотичні до кола із центром у точці *O*, які проходять через точку *A* і дотикаються до кола в точках *B* і *C* (див. мал.). Відрізки *AB* і *AC* називають *відрізками дотичних, проведених з точки A*.



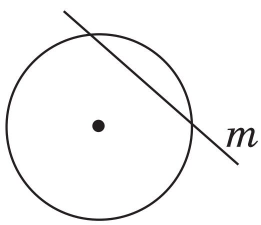
Т Теорема 3 (властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки). **Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.**

Доведення. На малюнку трикутники *OBA* і *OCA* – прямокутні, *OB* = *OC* (як радіуси), *OA* – спільна сторона цих трикутників. $\triangle OBA = \triangle OCA$ (за катетом і гіпотенузою). Тому *AB* = *AC*. Теорему доведено. ■

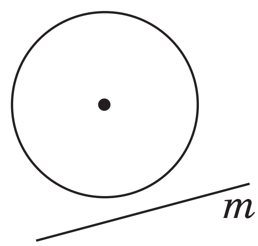
Яким може бути взаємне розміщення кола і прямої? • Яку пряму називають січною до кола? • Що більше: відстань від центра кола до січної чи радіус кола? • Що більше: відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає коло, чи радіус? • Яку пряму називають дотичною до кола? • Сформулюйте та доведіть властивість дотичної. • Сформулюйте та доведіть властивість, обернену до теореми про властивість дотичної. • Сформулюйте та доведіть теорему про властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

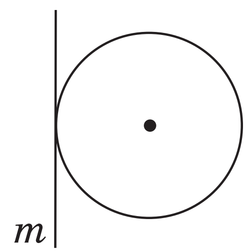
639. (*Усно*.) На якому з малюнків 22.4–22.6 пряма *m* є дотичною до кола, а на якому – січною?



Мал. 22.4



Мал. 22.5



Мал. 22.6

640. (*Усно*.) Скільки різних дотичних можна провести до кола через точку, що лежить:

1) на колі; 2) поза колом; 3) усередині кола?

641. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см, позначте на ньому точку *P*. За допомогою косинця проведіть через точку *P* дотичну до цього кола.

642. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3,5 см, позначте на ньому точку *M*. За допомогою косинця або транспортира проведіть дотичну через точку *M* до цього кола.

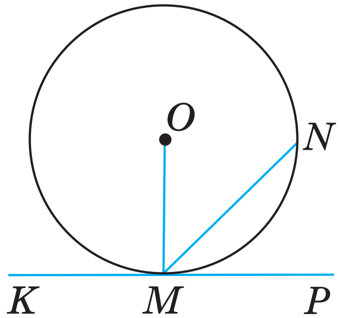
643. Радіус кола дорівнює 6 см. Як розміщені пряма *a* і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:

1) 4 см; 2) 6 см; 3) 8 см?

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 71 09.07.2024 12:51:37

644. Радіус кола дорівнює 3 дм. Як розміщені пряма *b* і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:
1) 3,7 дм; 2) 3 дм; 3) 2,7 дм?

645. На мал. 22.7 *KP* – дотична до кола, точка *O* – центр кола. Знайдіть:
1) $\angle OMN$, якщо $\angle NMP = 40°$;
2) $\angle KMN$, якщо $\angle OMN = 48°$.



Мал. 22.7

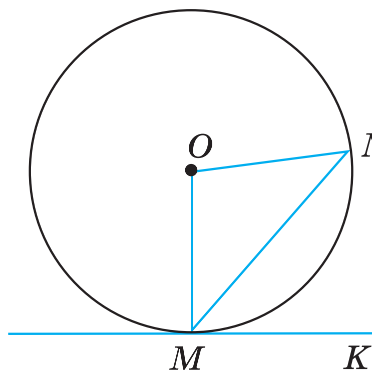
646. На мал. 22.7 *KP* – дотична до кола, точка *O* – центр кола. Знайдіть:
1) $\angle NMP$, якщо $\angle OMN = 53°$;
2) $\angle OMN$, якщо $\angle KMN = 130°$.

3 **647.** З точки *A* до кола із центром у точці *O* проведено дві дотичні *AB* і *AC* (*B* і *C* – точки дотику). Доведіть, що промінь *OA* – бісектриса кута *BOC*.

648. З точки *P* до кола із центром у точці *Q* проведено дотичні *PM* і *PN*. Доведіть, що промінь *PQ* – бісектриса кута *MPN*.

649. Пряма *MK* – дотична до кола, точка *O* – центр кола (мал. 22.8). Знайдіть $\angle NMK$, якщо $\angle MON = 82°$.

650. Пряма *MK* – дотична до кола, точка *O* – центр кола (мал. 22.8). Знайдіть $\angle NOM$, якщо $\angle KMN = 53°$.



Мал. 22.8

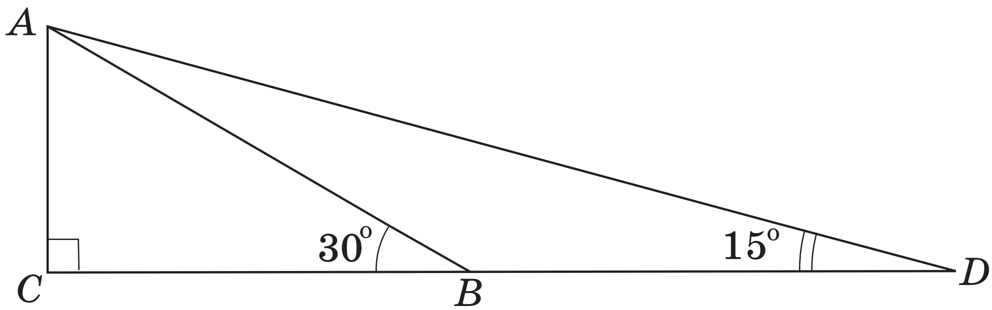
4 **651.** З точки *M*, що лежить поза колом, проведено дві дотичні. Відстань від точки *M* до центра кола вдвічі більша за радіус кола. Знайдіть кут між дотичними.

652. Прямі *MN* і *MK* дотикаються до кола із центром *O* в точках *N* і *K*. Знайдіть *NK*, якщо $\angle OMN = 30°$, $MN = 7$ см.

Вправи для повторення

653. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

654. На малюнку 22.9: $\angle C = 90°$, $\angle ABC = 30°$, $\angle ADB = 15°$, $AC = 6$ см. Знайдіть BD.



Мал. 22.9

Життєва математика

655. Для того щоб визначити відстань від спостерігача *B* до недоступного дерева *A*, що росте на другому березі, було виконано побудови (див. мал.). Як тепер можна знайти відстань *BA*?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

656. Поставте п'ять шашок на шахову дошку (розмір якої 8×8) так, щоб будь-який квадрат, що складається з дев'яти клітинок, містив тільки одну шашку.

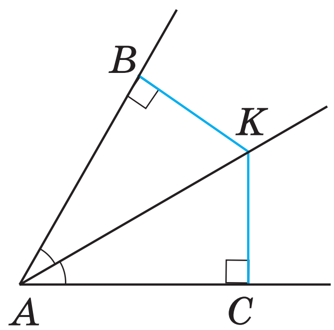
§ 23. Коло, вписане в трикутник

Властивість бісектриси кута

Розглянемо важливу властивість бісектриси кута.

Т Теорема 1 (властивість бісектриси кута).
Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.

Доведення. Виберемо на бісектрисі кута A довільну точку K і проведемо з точки K перпендикуляри KB і KC до сторін кута (див. мал.). Тоді KB і KC – відстані від точки K до сторін кута A. Доведемо, що $KB = KC$.



Розглянемо $\triangle AKB$ і $\triangle AKC$ ($\angle B = \angle C = 90°$). AK – їхня спільна гіпотенуза, $\angle BAK = \angle CAK$ (бо AK – бісектриса).

Отже, $\triangle AKB = \triangle AKC$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $KB = KC$.

Теорему доведено. ■

Коло, вписане у трикутник, та його існування

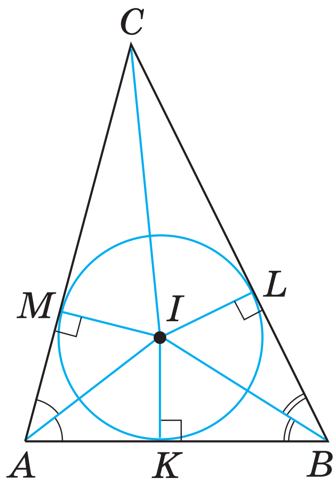
Коло **називають** ***вписаним у трикутник*****, якщо воно дотикається до всіх сторін цього трикутника.**

При цьому трикутник називають *описаним навколо кола*.

Т Теорема 2 (про коло, вписане в трикутник).
У будь-який трикутник можна вписати коло.

Доведення. Розглянемо довільний $\triangle ABC$. Нехай бісектриси кутів A і B цього трикутника перетинаються в точці I (мал. 23.1). Доведемо, що ця точка є центром вписаного в трикутник кола.

1) Оскільки точка I лежить на бісектрисі кута A, то вона рівновіддалена від сторін AB і AC трикутника, тобто $IM = IK$, де M і K – основи перпендикулярів, проведених з точки I до сторін AC і AB відповідно.



Мал. 23.1

2) Аналогічно $IK = IL$, де L – основа перпендикуляра, проведеного з точки I до сторони BC.

3) Отже, $IM = IK = IL$. Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, проходить через точки M, K і L. Сторони трикутника ABC дотикаються до цього кола в точках M, K і L, оскільки перпендикулярні до радіусів IM, IK і IL.

4) Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, є вписаним у $\triangle ABC$.

Теорему доведено. ■

Н Наслідок 1. **Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.**

Доведення. За доведенням попередньої теореми точка I – точка перетину бісектрис кутів A і B трикутника ABC. Доведемо, що бісектриса кута C також проходить через точку I.

Розглянемо прямокутні трикутники CMI і CLI (мал. 23.1).

Оскільки $IM = IL$, а CI – спільна гіпотенуза цих трикутників, то $\triangle CMI = \triangle CLI$ (за катетом і гіпотенузою). Тоді $\angle MCI = \angle LCI$ (як відповідні кути рівних трикутників), а CI – бісектриса кута C трикутника ABC.

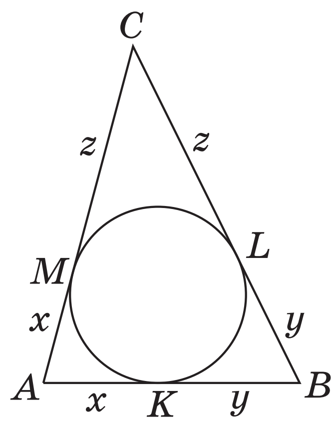
Отже, бісектриси всіх трьох кутів трикутника ABC проходять через точку I, тобто всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Наслідок доведено. ■

Нагадаємо, що точку перетину бісектрис трикутника називають *інцентром*.

> **Н** Наслідок 2. **Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника.**

Приклад. Коло, вписане у $\triangle ABC$, дотикається до сторони AB у точці K, до сторони BC – у точці L, а до сторони CA – у точці M. Довести, що:
$AK = AM = p - BC$, $BK = BL = p - AC$, $CM = CL = p - AB$, де
$p = \dfrac{AB + AC + BC}{2}$ – півпериметр трикутника ABC.

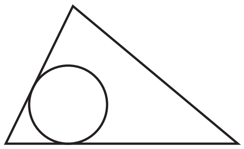


Доведення. 1) За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки, маємо: $AM = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ (див. мал.).
2) Позначимо $AM = AK = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$. Тоді $P_{ABC} = 2x + 2y + 2z =$ $= 2(x + y + z)$. Тому $p = x + y + z$, звідки $x = p - (y + z)$; тобто $x = p - BC$.
3) Маємо: $AM = AK = p - BC$.
Аналогічно доводиться, що $BK = BL = p - AC$, $CM = CL =$ $= p - AB$. ■

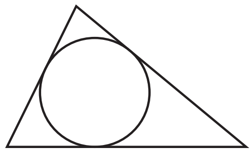
? Сформулюйте та доведіть властивість бісектриси кута. ○ Яке коло називають вписаним у трикутник? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про коло, вписане в трикутник, та наслідок 1 з неї. ○ Сформулюйте наслідок 2.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

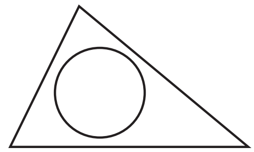
1 **657**. (*Усно*.) На яких з малюнків 23.2–23.5 зображено коло, вписане у трикутник?



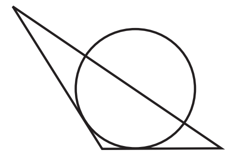
Мал. 23.2



Мал. 23.3



Мал. 23.4



Мал. 23.5

658. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля і лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

659. Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля і лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

660. У $\triangle ABC$ вписано коло із центром у точці I (мал. 23.1). Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle IBK = 35°$, $\angle MCI = 25°$.

661. У $\triangle ABC$ вписано коло із центром у точці I (мал. 23.1). $\angle CAB = 70°$, $\angle CBA = 60°$. Знайдіть $\angle MCI$.

662. На малюнку 23.1 точка I – центр кола, вписаного в різносторонній трикутник ABC, M, K і L – точки дотику. Знайдіть усі пари рівних між собою трикутників на цьому малюнку.

663. Доведіть, що центр кола, яке дотикається до сторін кута, лежить на бісектрисі цього кута.

664. Накресліть кут градусної міри 110°. За допомогою циркуля, косинця і транспортира впишіть у нього коло довільного радіуса, тобто побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута.

665. Накресліть кут градусної міри 70°. За допомогою циркуля, косинця і транспортира впишіть у нього коло довільного радіуса.

666. У трикутнику центр вписаного кола лежить на медіані. Доведіть, що це рівнобедрений трикутник.

667. У трикутнику центр вписаного кола лежить на висоті. Доведіть, що цей трикутник є рівнобедреним.

4 **668.** У $\triangle ABC$ вписано коло, яке дотикається до сторін AB, AC і BC у точках P, F і M відповідно. Знайдіть AP, PB, BM, MC, CF і FA, якщо $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $AC = 12$ см.

669. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо точки дотику кола, вписаного в цей трикутник, ділять його сторони на відрізки, три з яких дорівнюють 4 см, 6 см і 8 см.

670. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 3 см і 4 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.

671. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 7 см, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр трикутника.

Вправи для повторення

672. Доведіть, що висоти, проведені до бічних сторін гострокутного рівнобедреного трикутника, між собою рівні.

673. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3. Знайдіть кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини прямого кута.

Життєва математика

674. Яка швидкість поїзда (у км/год), якщо діаметр його колеса дорівнює 120 см і воно робить 360 обертів за хвилину? (Прийміть $\pi \approx 3$.)

Цікаві задачі – поміркуй одначе

675. Квадрат розрізали на вісім квадратів. Чи обов’язково п’ять з них рівні між собою?

§ 24. Коло, описане навколо трикутника

Серединний перпендикуляр та його властивість

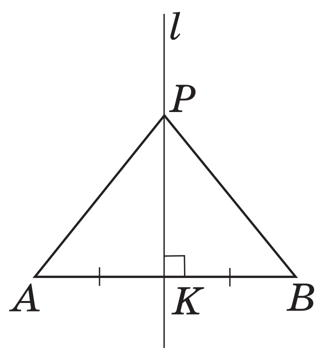
Серединним перпендикуляром до відрізка **називають пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього.**

На малюнку 24.1 пряма l – серединний перпендикуляр до відрізка AB.

Теорема 1 (властивість серединного перпендикуляра до відрізка). **Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.**

Доведення. Нехай пряма l – серединний перпендикуляр до відрізка AB, K – середина цього відрізка (мал. 24.1). Розглянемо довільну точку P серединного перпендикуляра і доведемо, що $PA = PB$.

Якщо точка P збігається з K, то рівність $PA = PB$ очевидна. Якщо точка P відмінна від K, то прямокутні трикутники PKA і PKB рівні між собою за двома катетами. Тому $PA = PB$. Теорему доведено. ■



Мал. 24.1

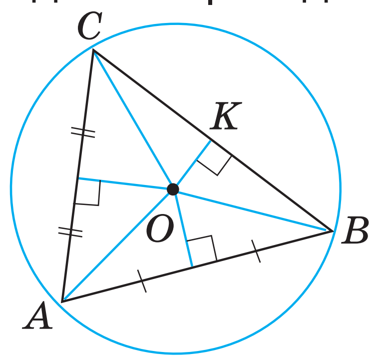
Коло, описане навколо трикутника, та його існування

Коло **називають** ***описаним навколо трикутника***, **якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.**

При цьому трикутник називають *вписаним у коло*.

Т Теорема 2 (про коло, описане навколо трикутника). **Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.**

Доведення. Розглянемо $\triangle ABC$. Нехай серединні перпендикуляри до сторін AB і AC цього трикутника перетинаються в точці O (мал. 24.2). Доведемо, що точка O є центром описаного навколо трикутника кола.



Мал. 24.2

1) Точка O лежить на серединному перпендикулярі до AB, тому вона рівновіддалена від вершин A і B, тобто $OA = OB$.

2) Аналогічно $OA = OC$, оскільки точка O лежить на серединному перпендикулярі до AC.

3) Маємо: $OA = OB = OC$. Тому коло із центром у точці O проходить через вершини A, B і C трикутника ABC, а відрізки OA, OB і OC є його радіусами. Отже, це коло є описаним навколо трикутника ABC.

Теорему доведено. ■

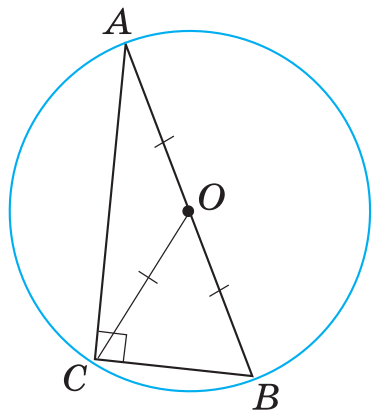
Н Наслідок 1. **Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.**

Доведення. Проведемо з точки O перпендикуляр OK до сторони BC (мал. 24.2). Цей перпендикуляр є висотою рівнобедреного трикутника OBC, що проведена до основи BC. Тому він також є і медіаною. Відрізок OK лежить на серединному перпендикулярі до сторони BC. Отже, усі три серединні перпендикуляри трикутника ABC проходять через точку O, тобто перетинаються в одній точці.

Наслідок доведено. ■

Наслідок 2. **Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.**

Приклад. Довести, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, а радіус цього кола дорівнює половині гіпотенузи.



Доведення. Нехай $\triangle ABC$ – прямокутний ($\angle C = 90°$), CO – його медіана (див. мал.).

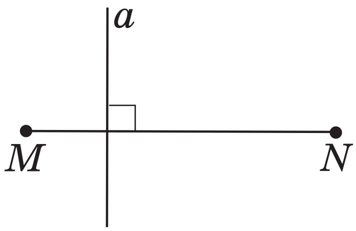
1) Оскільки медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи (див. § 19, властивість 5), то $CO = \frac{AB}{2}$. Але $AO = OB$. Тому $AO = BO = CO$.

2) Отже, точка O рівновіддалена від вершин трикутника ABC. Тому коло, центром якого є точка O, а радіусом – OA, проходить через усі вершини трикутника ABC. Отже, коло, центром якого є середина гіпотенузи, а радіус дорівнює половині гіпотенузи, є описаним навколо прямокутного трикутника ABC. ■

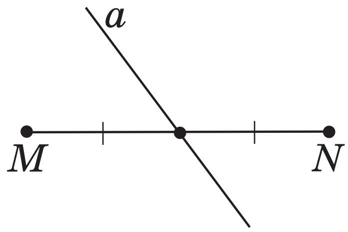
? Що називають серединним перпендикуляром до відрізка? ○ Сформулюйте та доведіть властивість серединного перпендикуляра до відрізка. ○ Яке коло називають описаним навколо трикутника? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про коло, описане навколо трикутника, та наслідок 1 з неї. ○ Яка саме точка є центром кола, описаного навколо трикутника?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

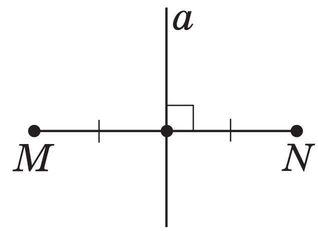
676. (*Усно.*) На яких з малюнків 24.3–24.5 пряма a є серединним перпендикуляром до відрізка MN?



Мал. 24.3

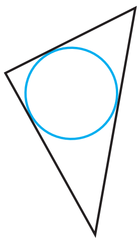


Мал. 24.4

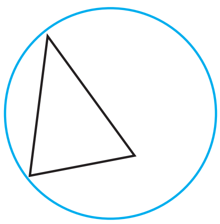


Мал. 24.5

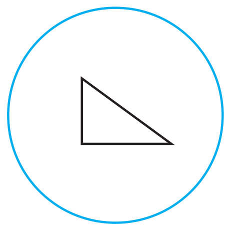
677. На якому з малюнків 24.6–24.9 зображено коло, описане навколо трикутника?



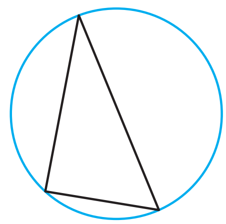
Мал. 24.6



Мал. 24.7



Мал. 24.8



Мал. 24.9

678. 1) Накресліть відрізок MN, довжина якого 5,4 см. За допомогою лінійки з поділками і косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка MN.

2) Позначте деяку точку P, що належить серединному перпендикуляру, і переконайтеся, що $PM = PN$.

679. 1) Накресліть відрізок AB завдовжки 4,6 см. За допомогою лінійки з поділками і косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка AB.

2) Позначте деяку точку C, що належить серединному перпендикуляру, і переконайтеся, що $CA = CB$.

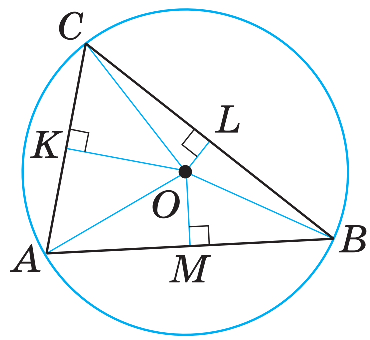
680. На малюнку 24.10 точка O – центр кола, описаного навколо різностороннього трикутника ABC. Знайдіть усі пари рівних між собою трикутників на цьому малюнку.

681. Скільки кіл можна провести через:

1) одну точку;

2) дві точки;

3) три точки, що не лежать на одній прямій?



Мал. 24.10

682. 1) Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

2) Де лежатиме центр цього кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

683. Накресліть трикутник, два кути якого дорівнюють 60° і 70°. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

684. 1) Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

2) Де лежатиме центр цього кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

685. Накресліть рівнобедрений трикутник з кутом 120° при вершині. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

686. У трикутнику центр описаного кола лежить на медіані. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

687. У трикутнику центр описаного кола лежить на висоті. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

688. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, удвічі більший за радіус кола, вписаного в нього.

Вправи для повторення

689. *LM* – діаметр кола, хорди *KL* і *KM* – рівні між собою. Знайдіть кути трикутника *KLM*.

690. *I* – точка перетину бісектрис *AM* і *BN* рівнобедреного трикутника *ABC* з основою *AB*. Доведіть, що $IN = IM$.

Життєва математика

691. Площа земельної ділянки, що має форму прямокутника, дорівнює 9 га, ширина ділянки дорівнює 150 м. Знайдіть довжину огорожі навколо цієї ділянки.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

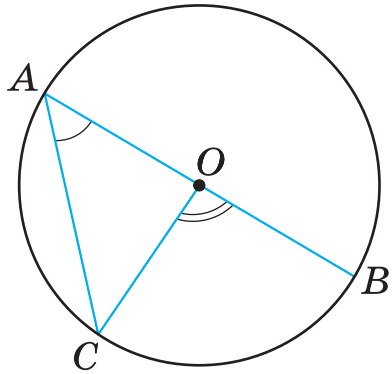
692. Накресліть коло, радіус якого 3 см. Проведіть у цьому колі діаметр і хорду.

693. Точка *O* – центр кола (мал. 24.11). Знайдіть:

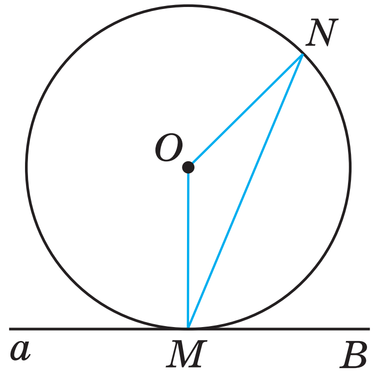
1) $\angle COB$, якщо $\angle CAO = 50°$;
2) $\angle CAO$, якщо $\angle COB = 110°$.

694. Точка *O* – центр кола, а точка *M* – точка дотику прямої *a* з колом (мал. 24.12). Знайдіть:

1) $\angle NMB$, якщо $\angle MON = 140°$;
2) $\angle MON$, якщо $\angle BMN = 65°$.



Мал. 24.11



Мал. 24.12

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 84 09.07.2024 12:51:43

Цікаві задачі – поміркуй одначе

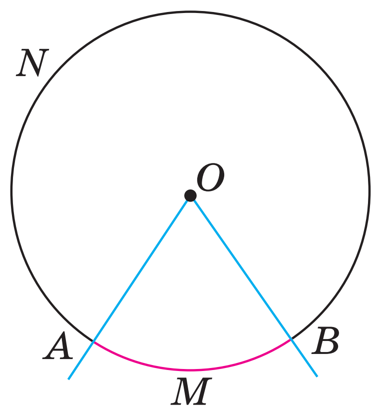
695. Відрізок 32 см завдовжки поділено двома точками на три не рівних між собою відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 20 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

§ 25. Центральні та вписані кути

Центральний кут. Градусна міра дуги

Центральним кутом **називають кут з вершиною в центрі кола.**

На малюнку 25.1 $\angle AOB$ – центральний кут, сторони якого перетинають коло в точках A і B. Точки A і B розбивають коло на дві дуги. Частину кола, яка лежить усередині кута, називають *дугою кола*, що відповідає цьому центральному куту.



Мал. 25.1

Якщо центральний кут менший від розгорнутого,	Якщо центральний кут більший за розгорнутий,	Розгорнутому куту
то дуга, що йому відповідає, є меншою за півколо (її виділено кольором на мал. 25.1).	то дуга, що йому відповідає, є більшою за півколо.	відповідає дуга, що є півколом.

Дугу позначають символом $\smile$, який записують перед назвою дуги або над нею. Щоб уточнити, про яку саме з двох дуг, на які центральний кут поділив коло, ідеться, на кожній з них позначають довільну точку, відмінну від кінців дуги. Наприклад, M і N (мал. 25.1). Тоді ці дуги можна записати так:

$$\smile AMB \text{ (або } \overset{\frown}{AMB}\text{) та } \smile ANB \text{ (або } \overset{\frown}{ANB}\text{).}$$

Якщо зрозуміло, про яку дугу йдеться, то для її позначення вказують лише кінці дуги, наприклад $\overset{\frown}{AB}$ (або $\smile AB$).

Дугу кола можна вимірювати в градусах.

Градусною мірою дуги кола **називають градусну міру відповідного центрального кута.**

Наприклад, якщо $\angle AOB = 70°$, то $\overset{\frown}{AMB} = 70°$ (мал. 25.1).

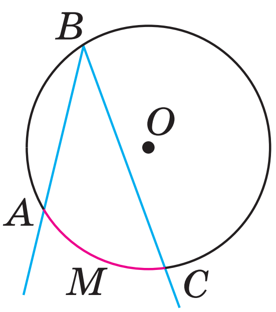
Очевидно, що градусна міра дуги, яка є півколом, дорівнює 180°, а дуги, що є колом, – 360°. На малюнку 25.1:

$$\overset{\frown}{ANB} = 360° - 70° = 290°.$$

Вписаний кут

Вписаним кутом **називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.**

На малюнку 25.2 сторони вписаного кута ABC перетинають коло в точках A і C. Кажуть, що цей кут *спирається на дугу AMC*.



Мал. 25.2

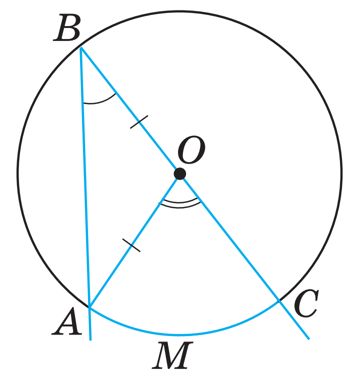
Точки перетину сторін вписаного кута з колом ділять коло на дві дуги. З них тією, на яку спирається вписаний кут, буде дуга, що не містить його вершини. Наприклад, на малюнку 25.2 сторони вписаного кута ABC

поділили коло на дві дуги: $\overset{\frown}{ABC}$ і $\overset{\frown}{AMC}$. Оскільки $\overset{\frown}{AMC}$ не містить вершини кута (точки B), то вона і є дугою, на яку спирається вписаний кут ABC. Цю дугу виділено кольором.

Теорема про вписаний кут та наслідки з неї

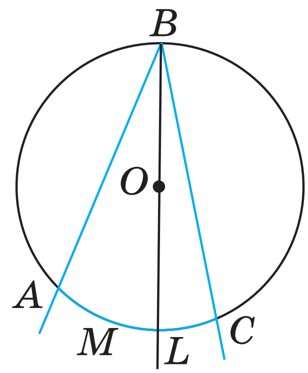
Т Теорема (про вписаний кут). **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

Доведення. Нехай $\angle ABC$ є вписаним у коло із центром O та спирається на дугу AC (мал. 25.2). Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. Розглянемо три можливих випадки розташування центра кола відносно даного вписаного кута.



Мал. 25.3

1) Нехай центр кола – точка O – лежить на одній зі сторін кута, наприклад BC (мал. 25.3). Центральний кут AOC є зовнішнім кутом трикутника AOB. Тоді, за властивістю зовнішнього кута, $\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB$. Але $\triangle AOB$ – рівнобедрений ($AO = OB$ як радіуси), тому $\angle ABO = \angle OAB$. Отже, $\angle AOC = 2\angle ABO$, тобто $\angle ABC = \angle ABO = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. Але ж $\angle AOC = \overset{\frown}{AMC}$. Отже, $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOC}$.



Мал. 25.4

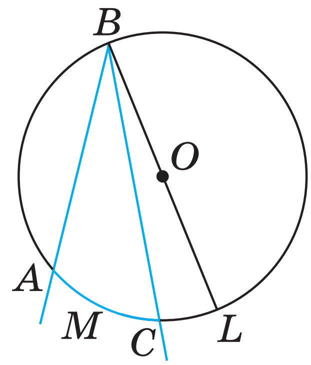
2) Нехай центр кола лежить усередині вписаного кута (мал. 25.4). Проведемо промінь BO, що перетинає коло в точці L. Тоді

$$\angle ABC = \angle ABL + \angle LBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AL} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AL} + \overset{\frown}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}.$$

3) Нехай центр кола лежить зовні вписаного кута (мал. 25.5). Тоді

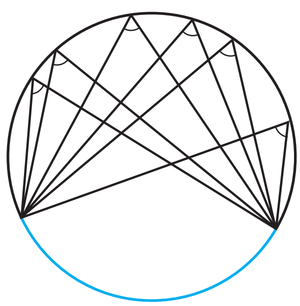
$$\angle ABC = \angle ABL - \angle CBL = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AL} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{LC} =$$

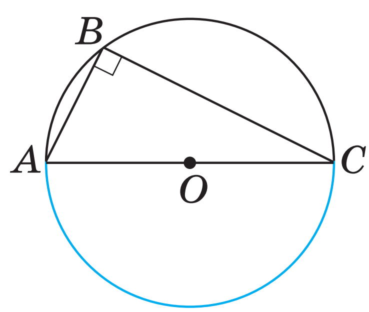
$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AL} - \overset{\frown}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}. \blacksquare$$



Мал. 25.5

Наслідок 1. **Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, між собою рівні** (мал. 25.6)**.**


Мал. 25.6

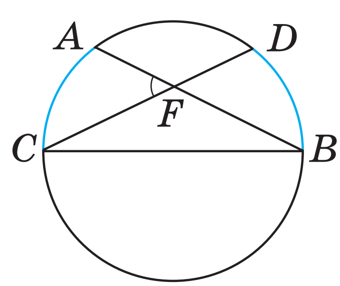


Мал. 25.7

Наслідок 2. **Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий** (мал. 25.7)**.**

Приклад 1. Довести, що кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою двох дуг, з яких одна міститься між сторонами кута, а друга – між продовженням сторін.

Доведення. Розглянемо $\angle AFC$, вершина якого міститься всередині кола (див. мал.).



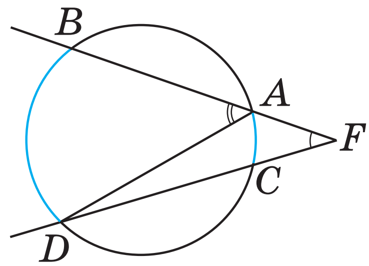
Доведемо, що $\angle AFC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$.

$\angle AFC$ – зовнішній для трикутника BCF.

Маємо:

$$\angle AFC = \angle FBC + \angle FCB = \frac{1}{2}\smile{AC} + \frac{1}{2}\smile{BD} = \frac{1}{2}(\smile{AC} + \smile{BD}).$$ ■

Приклад 2. Довести, що кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами.



Доведення. Розглянемо $\angle BFD$, вершина якого лежить зовні кола, а FB і FD – січні кола (див. мал.). Доведемо, що

$$\angle DFB = \frac{1}{2}(\smile{BD} - \smile{AC}).$$

1) $\angle BAD$ – зовнішній кут трикутника ADF.

Маємо: $\angle DAB = \angle ADC + \angle DFB$; тобто $\frac{1}{2}\smile{BD} = \frac{1}{2}\smile{AC} + \angle DFB$.

2) Тому $\angle DFB = \frac{1}{2}\smile{BD} - \frac{1}{2}\smile{AC} = \frac{1}{2}(\smile{BD} - \smile{AC})$. ■

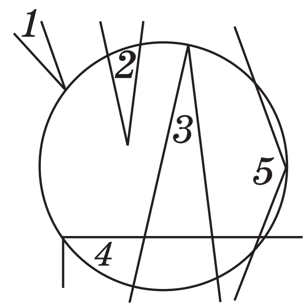
А ще раніше... Доведення теореми про вписаний кут зустрічається ще в «Началах» Евкліда. Але ще раніше цей факт, як припущення, уперше висловив Гіппократ Хіоський (V ст. до н. е.).

Те, що вписаний кут, який спирається на діаметр, є прямим, знали вавилоняни 4000 років тому, а перше доведення цього факту приписують Фалесу Мілетському.

? Який кут називають центральним? ○ Що називають градусною мірою дуги кола? ○ Який кут називають вписаним? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про вписаний кут.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

696. (*Усно*.) Які з кутів на малюнку 25.8 є вписаними в коло?



Мал. 25.8

697. Визначте градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює: 1) 70°; 2) 190°.

698. Визначте градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює: 1) 20°; 2) 100°.

699. Точки A і B належать колу й лежать по один бік від хорди CD. Знайдіть $\angle CAD$, якщо $\angle CBD = 55°$.

700. Точки A і B належать колу й лежать по різні боки від хорди MN. Доведіть, що $\angle MAN + \angle MBN = 180°$.

701. Точки M і N належать колу й лежать по різні боки від хорди AB. Знайдіть $\angle AMB$, якщо $\angle ANB = 70°$.

702. Точка P кола і його центр O лежать по різні боки від хорди CD. Знайдіть $\angle COD$, якщо $\angle CPD = 126°$.

703. Точка A кола і його центр O лежать по різні боки від хорди LK. Знайдіть $\angle LAK$, якщо $\angle LOK = 128°$.

704. Хорда розбиває коло на дві дуги у відношенні 1 : 2. Знайдіть міри вписаних кутів, що спираються на ці дуги.

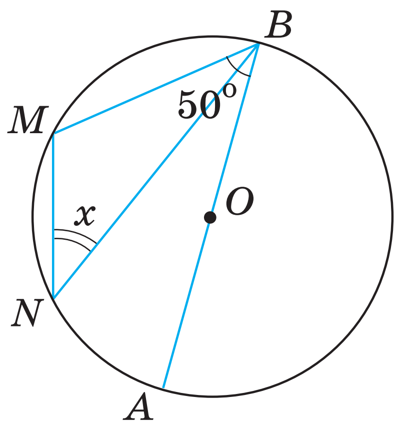
705. Хорда AB дорівнює радіусу кола. Точка C кола і його центр лежать по один бік від хорди AB. Знайдіть $\angle ACB$.

706. Хорди AD і BC перетинаються в точці F. $\angle ABC = 20°$, $\angle BCD = 80°$. Знайдіть градусну міру кута AFB.

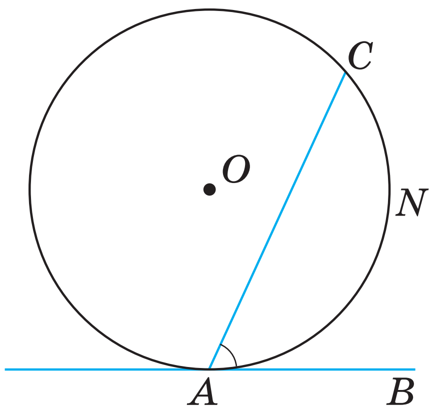
707. Хорди AB і CD перетинаються в точці M. $\angle ABC = 35°$, $\angle BAD = 55°$. Доведіть, що хорди AB і CD взаємно перпендикулярні.

4 **708**. O – центр кола, $\angle MBA = 50^\circ$ (мал. 25.9). Знайдіть x.

709. Доведіть, що кут між дотичною і хордою, що виходить з точки дотику, дорівнює половині дуги, яка лежить між сторонами кута, тобто $\angle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CNA}$ (мал. 25.10).



Мал. 25.9



Мал. 25.10

710. Рівнобедрений трикутник ABC вписано в коло із центром у точці O, $\angle AOB = 80^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC. Скільки розв'язків має задача?

711. Рівнобедрений трикутник MNK вписано в коло із центром у точці O, $\angle MOK = 100^\circ$. Знайдіть кути трикутника MNK. Скільки розв'язків має задача?

712. Коло поділено трьома точками на частини, які відносяться як 1 : 2 : 6, і точки поділу сполучено між собою. Знайдіть кути утвореного трикутника.

Вправи для повторення

713. Дано кут 30°. Коло радіусом 5 см дотикається до сторони кута і має центр на його іншій стороні. Обчисліть відстань від центра кола до вершини кута.

714. Випишіть у порядку зростання внутрішні кути трикутника ABC, якщо $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AC = 6$ см.

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 91 09.07.2024 12:51:48

Життєва математика

715. Щоб витягти з колодязя відро води, потрібно зробити 12 обертів вала. Знайдіть глибину колодязя, якщо діаметр вала дорівнює 32 см. Для спрощення обчислень вважайте, що $\pi \approx 3$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

716. Накресліть відрізок MN завдовжки 6 см.

1) Узявши точки M і N за центри, проведіть два кола, одне з яких (із центром у точці M) радіусом 4 см, а друге (із центром у точці N) радіусом 2 см.

2) Скільки спільних точок мають ці кола?

717. Накресліть відрізок AB завдовжки 5 см.

1) Узявши точки A і B за центри, проведіть два кола, одне з яких (із центром у точці A) радіусом 3 см, а друге (із центром у точці B) радіусом 4 см.

2) Скільки спільних точок мають ці кола?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

718. У кожній клітинці прямокутної дошки розміром 2025×2027 клітинок сидить жук. За сигналом усі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітинки. Чи обов’язково при цьому залишиться вільна клітинка?

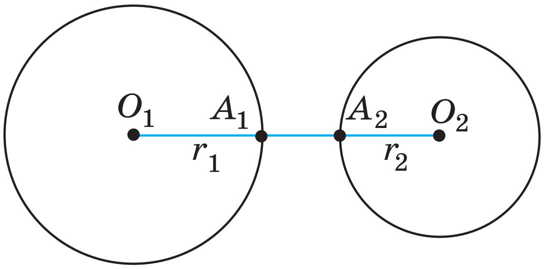
§ 26. Взаємне розміщення двох кіл

Розглянемо взаємне розміщення двох кіл із центрами в точках O_1 і O_2 і радіусами r_1 і r_2 відповідно.

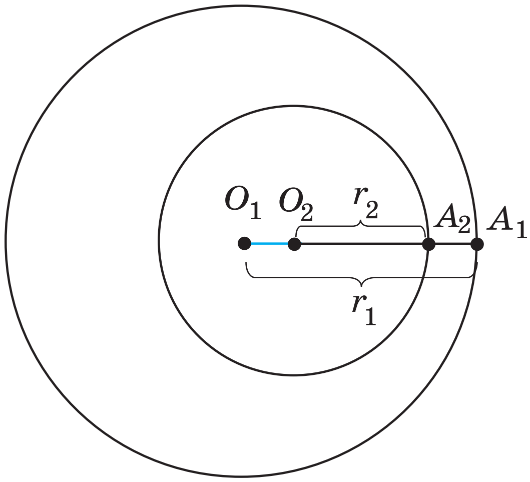
Кола, які не перетинаються

Два кола можуть не перетинатися, тобто не мати спільних точок (мал. 26.1 і 26.2). Можливі два випадки їх розміщення:

1. На малюнку 26.1 відстань між центрами кіл більша за суму радіусів:



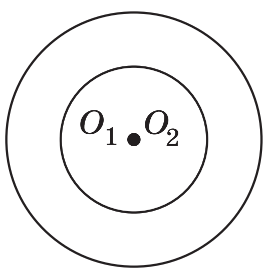
Мал. 26.1



Мал. 26.2

$O_1O_2 = O_1A_1 + A_1A_2 + A_2O_2 = r_1 + A_1A_2 + r_2 > r_1 + r_2$. Отже, $O_1O_2 > r_1 + r_2$.

2. На малюнку 26.2 $O_1A_1 = O_1O_2 + O_2A_2 + A_2A_1$; $r_1 = O_1O_2 + r_2 + A_2A_1$. Тому $O_1O_2 = (r_1 - r_2) - A_2A_1 < r_1 - r_2$. Отже, $O_1O_2 < r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$, тобто відстань між центрами кіл менша від різниці радіусів.

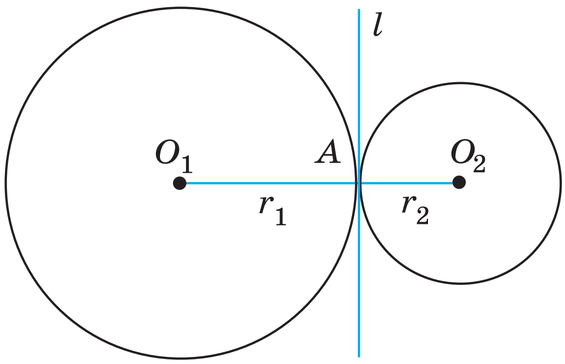


Два кола називають ***концентричними***, якщо вони мають спільний центр (див. мал.). У цьому випадку $O_1O_2 = 0$.

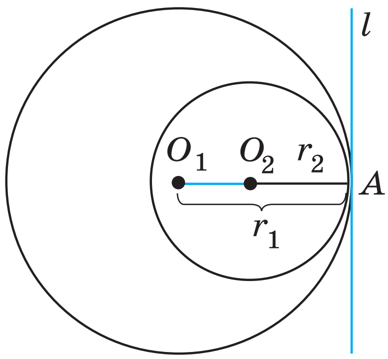
Очевидно, що концентричними може бути будь-яка кількість кіл.

Дотик двох кіл

Два кола можуть мати одну спільну точку (мал. 26.3 і 26.4). У такому разі кажуть, що кола *дотикаються*, а спільну точку називають *точкою дотику кіл*. Можливі два випадки такого розміщення.



Мал. 26.3



Мал. 26.4

1. Кола мають зовнішній дотик. Дотик двох кіл називають *зовнішнім*, якщо центри кіл лежать по різні боки від точки дотику (мал. 26.3). У цьому разі:

1) $O_1O_2 = O_1A + AO_2 = r_1 + r_2$ (відстань між центрами кіл дорівнює сумі їхніх радіусів);

2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;

3) $l \perp O_1O_2$.

2. Кола мають внутрішній дотик. Дотик двох кіл називають *внутрішнім*, якщо центри кіл лежать по один бік від точки дотику (мал. 26.4). У цьому разі:

1) $O_1O_2 = O_1A - O_2A = r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$ (відстань між центрами кіл дорівнює різниці їхніх радіусів);

2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;

3) $l \perp O_1O_2$.

Приклад 1. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами 10 см. Визначити радіуси кіл, якщо один із радіусів на 2 см більший за інший.

Розв'язання. Нехай кола із центрами в точках O_1 і O_2 дотикаються в точці A (мал. 26.3).

1) За умовою, $O_1O_2 = 10$ см. Позначимо $AO_2 = x$ см, тоді $AO_1 = (x + 2)$ см.

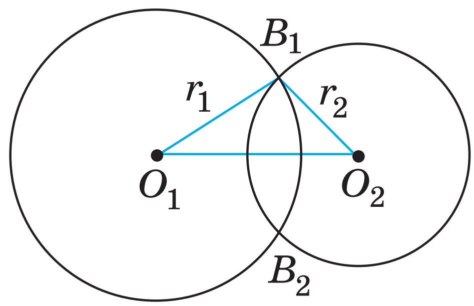
2) Оскільки $O_1O_2 = AO_1 + AO_2$, то маємо рівняння $x + (x + 2) = 10$, звідки $x = 4$ (см).

3) Отже, $AO_2 = 4$ см; $AO_1 = 4 + 2 = 6$ (см).

Відповідь: 6 см; 4 см.

Перетин двох кіл

Два кола можуть мати дві спільні точки (див. мал.), тобто кола *перетинаються*. У цьому разі відстань між центрами кіл менша від суми їх радіусів, але більша за різницю їх радіусів. За нерівністю трикутника і наслідком з неї для $\triangle O_1B_1O_2$ маємо: $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, де $r_1 \geqslant r_2$.



Встановлення взаємного розміщення двох кіл

Приклад 2. Відстань між центрами двох кіл $O_1O_2 = 10$ см. Визначити взаємне розміщення цих кіл, якщо:

1) $r_1 = 6$ см, $r_2 = 4$ см; 2) $r_1 = 8$ см, $r_2 = 4$ см;
3) $r_1 = 5$ см, $r_2 = 3$ см.

Розв'язання. 1) Оскільки $10 = 6 + 4$, тобто $O_1O_2 = r_1 + r_2$, то кола дотикаються (зовнішній дотик кіл);

2) оскільки $8 - 4 < 10 < 8 + 4$, тобто $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, то кола перетинаються;

3) оскільки $10 > 5 + 3$, тобто $O_1O_2 > r_1 + r_2$, то кола не перетинаються.

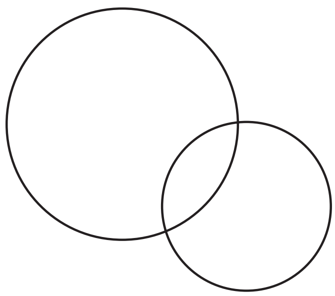
Відповідь: 1) дотикаються; 2) перетинаються; 3) не перетинаються.

? Що означає: два кола не перетинаються? • Що означає: кола дотикаються? • Який дотик кіл називають зовнішнім, а який – внутрішнім? • Що означає: два кола перетинаються?

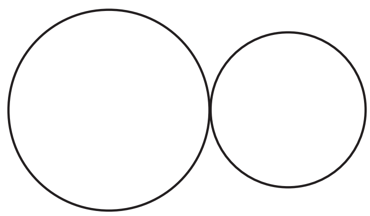
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

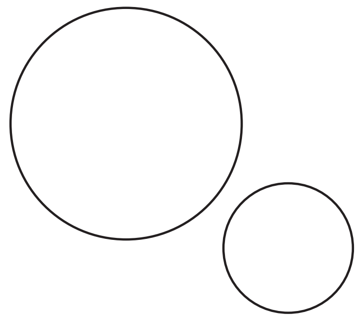
719. Що можна сказати про взаємне розміщення кіл на малюнках 26.5–26.7?



Мал. 26.5



Мал. 26.6



Мал. 26.7

720. Накресліть два кола, радіуси яких дорівнюють 3 см і 2 см, так, щоб вони:

1) мали внутрішній дотик; 2) перетиналися;

3) були концентричними.

721. Накресліть два кола, радіуси яких дорівнюють 2 см і 1,5 см, так, щоб вони:

1) мали зовнішній дотик; 2) не перетиналися.

2

722. Накресліть відрізок 4 см завдовжки. Побудуйте два кола, що мають зовнішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

723. Накресліть відрізок 2 см завдовжки. Побудуйте два кола, що мають внутрішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

724. Радіуси двох кіл дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть відстань між їхніми центрами, якщо кола мають:

1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

725. Радіуси двох кіл дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть відстань між їхніми центрами, якщо кола мають:

1) зовнішній дотик; 2) внутрішній дотик.

726. Два кола мають внутрішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 12 дм. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться як 2 : 5.

727. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 15 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться як 2 : 3.

728. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 12 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, радіуси яких:

1) 9 см і 3 см; 2) 5 см і 2 см;
3) 13 см і 1 см; 4) 9 см і 7 см.

729. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 14 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, радіуси яких:

1) 7 см і 5 см; 2) 16 см і 2 см;
3) 10 см і 5 см; 4) 7 см і 7 см.

730. Два кола перетинаються в точках A і B. Точки O_1 і O_2 – центри цих кіл. Доведіть, що $O_1O_2 \perp AB$.

731. Два кола перетинаються в точках C і D. Точки O_1 і O_2 – центри кіл. Доведіть, що промінь O_1O_2 – бісектриса кута CO_1D.

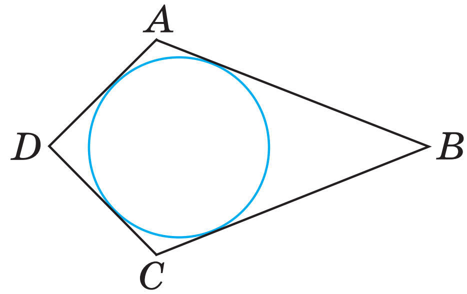
732. Три кола попарно мають зовнішній дотик. Відрізки, що сполучають їхні центри, утворюють трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 8 см. Знайдіть радіуси цих кіл.

733. Три кола попарно дотикаються зовні. Радіус одного з кіл дорівнює 6 см, а відрізок, що сполучає центри двох інших кіл, дорівнює 14 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

Вправи для повторення

734. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 20 см, $\angle B = 60°$. Довжину якого з катетів можна знайти? Знайдіть її.

735. На малюнку 26.8 коло вписано в чотирикутник $ABCD$ (дотикається до всіх його сторін). Доведіть, що $AB + CD = AD + BC$.



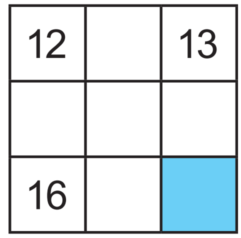
Мал. 26.8

Життєва математика

736. Приватна підприємиця має три магазини, розміщені в точках A, B і C, які не лежать на одній прямій. Вона хоче побудувати склад так, щоб відстань від нього до всіх магазинів була однаковою. Де має бути розміщений цей склад?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

737. Прямокутник поділено на дев'ять прямокутників (див. мал.). Периметри трьох з них відомі, і їх вказано на малюнку. Знайдіть периметр зафарбованого прямокутника.



§ 27. Основні задачі на побудову та їх розв'язування

Задачі на побудову в курсі геометрії

Вивчаючи курс геометрії, ви неодноразово виконували різні геометричні побудови: проводили прямі, відкладали відрізки, що дорівнюють даним, будували кути тощо. При цьому використовували лінійку з поділками, транспортир, косинець, циркуль. Тепер розглянемо побудови фігур, які можна виконати за допомогою лише двох інструментів: лінійки без поділок і циркуля. Цими інструментами користувалися ще в Давній Греції, тому їх прийнято вважати класичними інструментами.

Що можна зробити за допомогою двох цих інструментів? Лінійка дає змогу провести довільну пряму, побудувати пряму, що проходить через дану точку, і пряму, що проходить через дві дані точки. За допомогою циркуля можна провести коло довільного радіуса, коло із центром у даній точці й радіусом, що дорівнює даному відрізку. У деяких випадках замість кола потрібна буде деяка його частина (дуга кола). Зауважимо, що жодних інших побудов у задачах на побудову виконувати не дозволяється. Наприклад, за допомогою лінійки (навіть з поділками) не дозволяється відкладати відрізок заданої довжини, не можна використовувати косинець для побудови перпендикулярних прямих тощо.

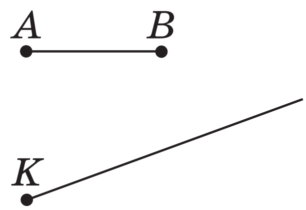
! *Розв'язати задачу на побудову* – означає вказати послідовність найпростіших побудов, після виконання яких отримаємо задану фігуру; далі – довести, що побудована фігура має властивості, передбачені умовою, тобто є шуканою фігурою.

Іноді для найскладніших задач потрібно виконати аналіз, тобто провести міркування, на основі яких і буде розв'язано задачу.

Далі розглянемо найпростіші задачі на побудову.

Побудова відрізка, що дорівнює даному

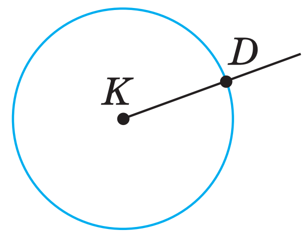
Приклад 1. На даному промені від його початку відкласти відрізок, що дорівнює заданому.



Мал. 27.1

Розв'язання. Зобразимо фігури, що дано в умові задачі: відрізок AB і промінь з початком у точці K (мал. 27.1).

1) Побудуємо циркулем коло із центром у точці K, радіус якого дорівнює AB (мал. 27.2). Це коло перетне промінь у деякій точці D.

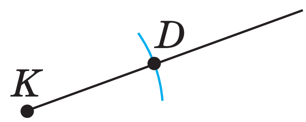


Мал. 27.2

2) Очевидно, що $KD = AB$.

3) Тому KD – шуканий відрізок.

Замість кола можна було провести ту його частину (деяку дугу), яка б мала перетин з променем (див. мал.). Цю дугу ще називають *засічкою*.

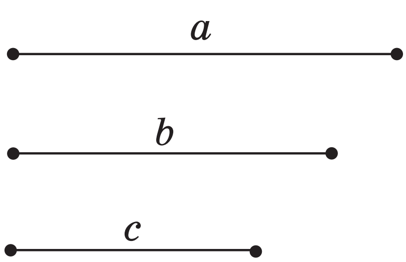


Побудова трикутника за трьома сторонами

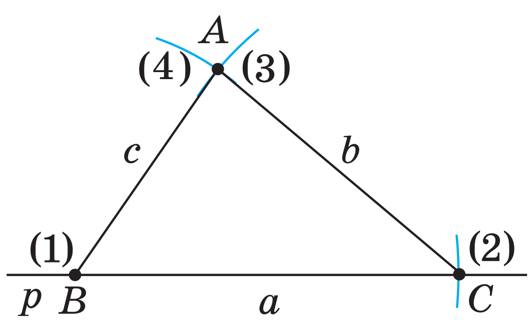
Приклад 2. Побудувати трикутник із заданими сторонами a, b і c.

Розв'язання. Нехай задано три відрізки a, b і c (мал. 27.3).

1) За допомогою лінійки проведемо довільну пряму p і позначимо на ній довільну точку B ((1) на мал. 27.4).



Мал. 27.3



Мал. 27.4

2) За допомогою циркуля відкладемо на прямій *p* відрізок *BC* = *a* (дуга (2) на мал. 27.4).
3) Розхилом циркуля, що дорівнює *b*, опишемо дугу (3) кола із центром у точці *C* (мал. 27.4).
4) Розхилом циркуля, що дорівнює *c*, опишемо дугу (4) кола із центром у точці *B* (мал. 27.4).
5) Точка *A* – точка перетину дуг (3) і (4). △ *ABC* – шуканий.

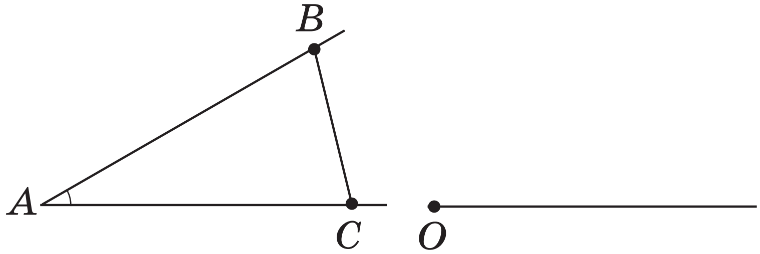
Доведення цього факту є очевидним, оскільки сторони трикутника *ABC* дорівнюють заданим відрізкам *a*, *b* і *c*: *BC* = *a*, *AC* = *b*, *AB* = *c*.

Зауваження. Якби побудовані дуги (3) і (4) не перетнулися, то трикутник побудувати було б неможливо. За нерівністю трикутника: кожна зі сторін має бути меншою від суми двох інших.

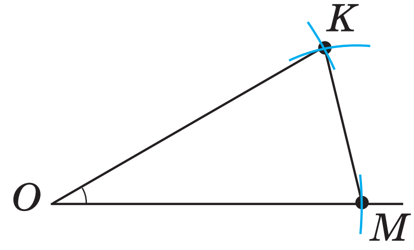
Побудова кута, що дорівнює даному

Приклад 3. Від даного променя відкласти заданий кут.

Розв'язання. Нехай дано кут *A* і промінь з початком у точці *O* (мал. 27.5). Потрібно побудувати кут, що дорівнює куту *A*, так, щоб одна з його сторін збігалася з даним променем.
1) Позначимо на сторонах даного кута *A* дві довільні точки *B* і *C* (мал. 27.5).
2) Побудуємо трикутник *OKM*, що дорівнює трикутнику *ABC*, так, щоб *AB* = *OK*, *AC* = *OM*, *BC* = *KM* (мал. 27.6).
3) Тоді ∠ *KOM* = ∠ *BAC* (як відповідні кути рівних трикутників).
4) Отже, ∠ *KOM* – шуканий.



Мал. 27.5



Мал. 27.6

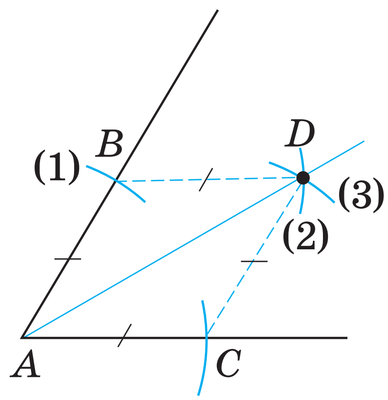
Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[СлЗ]_(029-24)_V1.indd 101 09.07.2024 12:51:52

Доведення цього випливає з побудови, бо $\triangle OKM = \triangle ABC$, а тому $\angle KOM = \angle A$. ■

Побудова бісектриси заданого кута

Приклад 4. Побудувати бісектрису заданого кута.

Розв'язання. Нехай дано $\angle A$, потрібно побудувати його бісектрису (див. мал.).



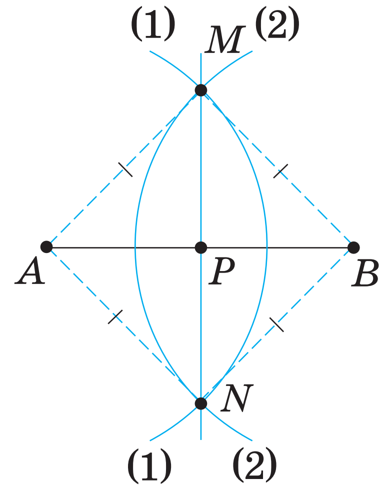
1) Проведемо дугу кола довільного радіуса із центром у точці A (дуга (1) на мал.), яка перетинає сторони кута в точках B і C.
2) З точок B і C опишемо дуги таким самим радіусом (дуги (2) і (3)) у внутрішній області кута до їх перетину. Отримаємо точку D.
3) Проведемо промінь AD. Промінь AD – шукана бісектриса кута A.

Доведення. $\triangle ABD = \triangle ACD$ (за трьома сторонами), тому $\angle BAD = \angle CAD$ (як відповідні кути рівних трикутників), отже, AD – бісектриса кута A. ■

Поділ заданого відрізка навпіл

Приклад 5. Поділити заданий відрізок навпіл.

Розв'язання. Нехай AB – заданий відрізок, який потрібно поділити навпіл, тобто побудувати його середину.



1) З точки A радіусом циркуля, більшим за половину відрізка AB, опишемо дугу (1) (див. мал.).
2) З точки B таким самим радіусом циркуля опишемо дугу (2) до перетину з дугою (1) у точках M і N.

3) Через точки M і N проведемо пряму MN. Пряма MN перетинає відрізок AB в точці P. P – шукана точка.

Доведення. $\triangle AMN = \triangle BMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle AMP = \angle BMP$, а MP – бісектриса рівнобедреного трикутника AMB з основою AB, тому вона є також медіаною. Отже, P – середина AB. ■

Зауважимо, що пряма MN є серединним перпендикуляром до відрізка AB.

Побудова прямої, перпендикулярної до заданої

Приклад 6. Через дану точку M провести пряму, перпендикулярну до заданої прямої a.

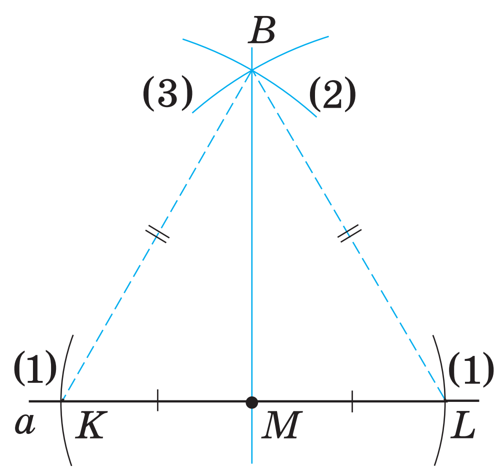
Розв'язання. Задача має два випадки.

1. Нехай точка M належить прямій a.

1) На даній прямій a довільним радіусом циркуля відкладемо від точки M два рівних відрізки MK і ML (дуги (1) на мал. 27.7).

2) Із точок K і L радіусом, що дорівнює KL, опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину. Отримаємо точку B.

3) Проведемо пряму BM. Пряма BM – шукана.



Мал. 27.7

Доведення. $KL = KB = LB$, отже, BM – медіана рівностороннього трикутника BKL, тому вона є також і висотою. Отже, $BM \perp a$.

2. Нехай точка M не належить прямій a.

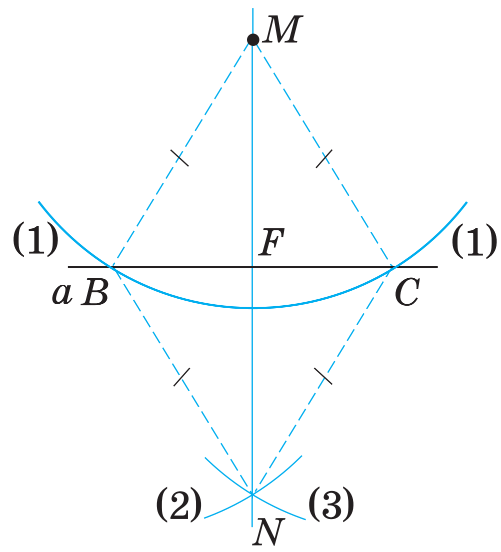
1) З точки M довільним радіусом циркуля (більшим за відстань від точки M до прямої a) проведемо дугу (1), яка перетинає пряму a в точках B і C (мал. 27.8).

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[СлЗ]_(029-24)_V1.indd 103 09.07.2024 12:51:53

2) З точок *B* і *C* тим самим радіусом циркуля опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину в точці *N* з іншого боку від точки *M*.

3) Проведемо пряму *MN*. Пряма *MN* – шукана пряма.

Доведення. Нехай точка *F* – точка перетину прямих *BC* і *MN*. $\triangle BMN = \triangle CMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BMN = \angle CMN$. *MF* – бісектриса рівнобедреного трикутника *BMC*, проведена до його основи. Тому *MF* є також і висотою. Отже, $MF \perp BC$, а тому $MN \perp a$. ■



Мал. 27.8

Примітка. У задачах цього параграфа для задання умов задачі (наприклад, довжини відрізка чи градусної міри кута) використовуємо лінійку з поділками і транспортир, а для розв'язування задачі – лише лінійку без поділок і циркуль.

? Які інструменти використовують для розв'язування задач на побудову? ● Які побудови можна виконати за допомогою лінійки без поділок? ● Які побудови можна виконати за допомогою циркуля? ● Що означає: розв'язати задачу на побудову? ● Як побудувати відрізок, що дорівнює заданому? ● Як побудувати трикутник за трьома сторонами? ● Як побудувати кут, що дорівнює заданому? ● Як побудувати бісектрису заданого кута? ● Як поділити заданий відрізок навпіл? ● Як побудувати пряму, перпендикулярну до заданої? ● Як побудувати трикутник за трьома сторонами?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **738**. Проведіть довільну пряму та відкладіть на ній відрізок, що дорівнює відрізку на малюнку 27.9.

739. Проведіть довільний промінь та відкладіть від його початку відрізок, що дорівнює відрізку на малюнку 27.10.

Мал. 27.9

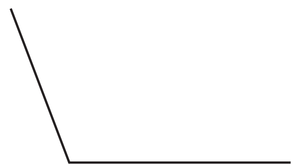
Мал. 27.10

Мал. 27.11

740. Проведіть довільну пряму *m*, виберіть на ній точку *M* і опишіть коло із центром у точці *M*, радіус якого дорівнює відрізку, зображеному на малюнку 27.11. У скількох точках коло перетнуло пряму?

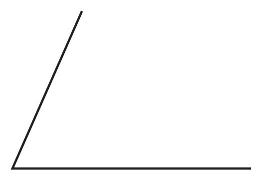
741. Накресліть довільний відрізок *MN*. Побудуйте коло із центром у точці *M*, радіус якого дорівнює *MN*.

742. Побудуйте кут, що дорівнює заданому (мал. 27.12).



Мал. 27.12

743. Побудуйте кут, що дорівнює заданому (мал. 27.13).



Мал. 27.13

744. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 70°, та його бісектрису – без допомоги транспортира.

745. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 110°, та його бісектрису – без допомоги транспортира.

746. Побудуйте відрізок, що дорівнює заданому (мал. 27.14), та поділіть його навпіл.

747. Побудуйте відрізок, що дорівнює заданому (мал. 27.15), та поділіть його навпіл.

Мал. 27.14

Мал. 27.15

748. Накресліть пряму *b* та позначте точку *M*, що їй не належить. Проведіть пряму *MN* перпендикулярно до прямої *b*.

749. Накресліть пряму *m* та позначте точку *P*, що їй належить. Проведіть пряму *PK* перпендикулярно до прямої *m*.

750. Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 5 см і 3 см.

751. Накресліть гострокутний $\triangle ABC$ та побудуйте його медіану CP.

752. Накресліть прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Побудуйте його медіану CM та бісектрису AK.

753. Накресліть прямокутний $\triangle KLM$ ($\angle K = 90°$). Побудуйте його бісектрису KP та медіану LT.

754. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{3}{4}$ від побудованого відрізка.

755. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{1}{4}$ від побудованого відрізка.

756. Побудуйте трикутник зі сторонами $a = 8$ см, $b = 7$ см, $c = 5$ см.

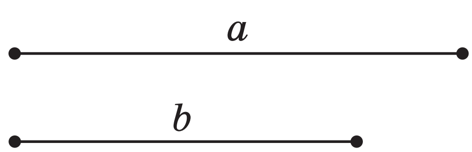
757. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $CA = 7$ см.

758. Накресліть довільний $\triangle ABC$ і побудуйте $\triangle ABD$ такий, що дорівнює трикутнику ABC.

759. Накресліть довільний трикутник і побудуйте трикутник, що йому дорівнює.

760. Накресліть довільний відрізок AB. Побудуйте рівносторонній $\triangle ABC$.

761. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює відрізку a, а бічна сторона – відрізку b (мал. 27.16).



Мал. 27.16

762. Побудуйте $\triangle DEF$, якщо $DE = 6$ см, $\angle D = 40°$, $\angle E = 80°$.

763. Побудуйте $\triangle NPT$, якщо $NP = 4$ см, $\angle N = 50°$, $\angle P = 100°$.

3 **764**. На даній прямій *a* знайдіть точки, віддалені від заданої точки *A* цієї прямої на відстань:
1) 4 см; 2) більшу ніж 4 см;
3) меншу ніж 4 см.

765. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і радіусом описаного кола.

766. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 105°$.

767. Побудуйте $\triangle KLM$, якщо $KL = 6$ см, $KM = 4$ см, $\angle K = 80°$.

768. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 4 см, а кут при основі 70°.

769. Побудуйте рівносторонній трикутник зі стороною 5 см і впишіть у нього коло.

770. Побудуйте довільний трикутник та опишіть навколо нього коло.

771. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює 6 см, а висота, проведена до неї, – 4 см.

772. Побудуйте коло, радіус якого 4 см, позначте на цьому колі деяку точку *A* і проведіть через неї дотичну до кола – пряму *b*.

773. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 4 см, а кут при вершині – 80°.

774. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а кут при вершині – 100°.

775. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

776. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою прямого кута.

777. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

778. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

779. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до нього.

780. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і радіусом описаного кола.

781. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

4 **782.** Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 4$ см, $\angle A = 40°$, $\angle C = 105°$.

783. Не користуючись транспортиром, побудуйте кути 30° і 60°.

784. Не користуючись транспортиром, побудуйте кут, що дорівнює 15°.

785. Побудуйте без транспортира $\triangle ABC$, у якого:
1) $AB = 5$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$;
2) $AB = BC = 4$ см, $\angle B = 150°$.

786. Побудуйте без транспортира $\triangle KMP$, у якого:
1) $KM = 4$ см, $\angle K = 30°$, $\angle M = 45°$;
2) $KM = MP = 5$ см, $\angle M = 120°$.

787. Побудуйте рівносторонній трикутник за його медіаною.

788. Побудуйте трикутник за двома нерівними сторонами і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків має задача?

Вправи для повторення

789. Один з кутів трикутника дорівнює 15°, а два інших відносяться як 7 : 8. Знайдіть найменший із зовнішніх кутів трикутника.

790. Доведіть, що в рівних між собою трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, однакової довжини.

791. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а гіпотенуза – 60 см. Знайдіть відрізки, на які ділить гіпотенузу висота, проведена до неї.

Життєва математика

792. 1) Щоб залити один квадратний метр ковзанки, потрібно 40 л води. Скільки потрібно буде води, щоб залити ковзанку круглої форми діаметром 30 м?

2) Дізнайтеся, скільки коштує 1 $м^3$ води, та обчисліть, яку суму повинна буде сплатити муніципальна влада за використану воду.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

793. Розв’яжіть задачу та прочитайте прізвище першого президента незалежної України.

Промінь BK проходить між сторонами кута ABC. Знайдіть $\angle ABK$ і $\angle KBC$, якщо $\angle ABC = 120^\circ$.

Умова	$\angle ABK$	$\angle KBC$
$\angle ABK$ на 20° менший від $\angle KBC$	А	В
$\angle ABK$ утричі більший за $\angle KBC$	У	К
$\angle ABK : \angle KBC = 3 : 5$	Р	Ч

30°	45°	50°	70°	75°	90°	30°

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5 (§§ 21–27)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

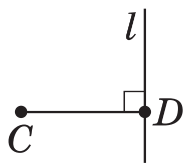
1. Знайдіть радіус кола, діаметр якого дорівнює 8 см.

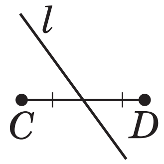
А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 16 см **Г.** 8 см

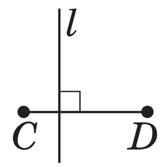
2. Знайдіть градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює 40°.

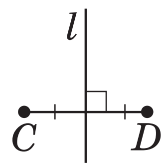
А. 20° **Б.** 40° **В.** 80° **Г.** 120°

3. Укажіть малюнок, на якому пряма *l* є серединним перпендикуляром до відрізка *CD*.

А.


Б.


В.


Г.


2

4. Радіус кола дорівнює 4 см. Як розміщені пряма *a* і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює 3 см?

А. пряма перетинає коло у двох точках
Б. пряма є дотичною до кола
В. пряма не має з колом спільних точок
Г. неможливо визначити

5. Точка *O* – центр кола, *MN* – його хорда. Знайдіть $\angle MON$, якщо $\angle OMN = 70°$.

А. 20° **Б.** 40° **В.** 60° **Г.** 70°

6. Кола, радіуси яких 6 см і 2 см, мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 6 см **Г.** 8 см

3

7. Точка *O* – центр кола, *AB* – його діаметр, *BC* – хорда, $\angle COA = 50°$. Знайдіть $\angle BCO$.

А. 25° **Б.** 35° **В.** 50° **Г.** 60°

8. Два кола мають зовнішній дотик, а відстань між їхніми центрами дорівнює 14 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо радіус одного з них на 4 см більший за радіус другого.

А. 8 см і 4 см **Б.** 9 см і 5 см
В. 10 см і 6 см **Г.** 11 см і 7 см

9. Хорди MN і KL перетинаються в точці A. $\angle MKL = 30^\circ$, $\angle KLN = 70^\circ$. Знайдіть градусну міру кута KAM.

А. 30° **Б.** 70°
В. 80° **Г.** 100°

4 **10**. З точки M, що лежить поза колом, проведено до кола дві дотичні MA і MB, де A і B – точки дотику, $\angle MBA = 60^\circ$. Знайдіть відстань від точки M до центра кола, якщо радіус кола дорівнює 10 см.

А. 10 см **Б.** 15 см
В. 20 см **Г.** 25 см

11. Центр кола, описаного навколо трикутника, збігається із серединою сторони в трикутнику, що є…

А. прямокутним **Б.** гострокутним
В. тупокутним **Г.** рівностороннім

12. Три кола, радіуси яких 3 см, 4 см і 5 см, попарно дотикаються зовні. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

А. 22 см **Б.** 23 см
В. 24 см **Г.** 25 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13**. Радіуси двох кіл дорівнюють r_1 і r_2, а відстань між їхніми центрами – 10 см. Установіть відповідність між радіусами кіл r_1 і r_2 (1–3) та взаємним положенням цих кіл (А–Г).

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[СлЗ]_(029-24)_V1.indd 111 09.07.2024 12:51:56

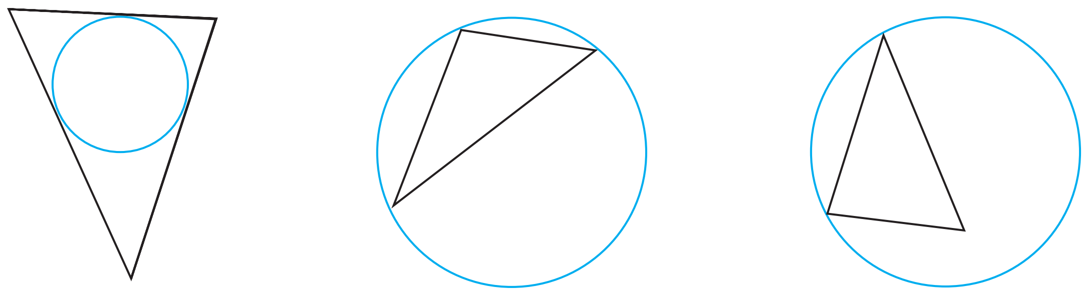
Радіуси кіл	*Взаємне положення кіл*
1. $r_1 = 4$ см, $r_2 = 7$ см	**А.** зовнішній дотик
2. $r_1 = 8$ см, $r_2 = 2$ см	**Б.** внутрішній дотик
3. $r_1 = 5$ см, $r_2 = 3$ см	**В.** кола перетинаються
	Г. кола не мають спільних точок

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 21–27

1. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 26 мм.

2. Знайдіть градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 70°.

3. На якому з малюнків зображено коло, описане навколо трикутника, а на якому – вписане у трикутник?



4. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр *MN* і хорду *KL*. Побудуйте за допомогою косинця дотичну до кола, що проходить через точку *M*.

5. Точка *O* – центр кола, *AB* – його хорда. Знайдіть $\angle OAB$, якщо $\angle AOB = 136°$.

6. Накресліть відрізок *FP* завдовжки 5 см. За допомогою лінійки з поділками та косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка *FP*.

7. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 20 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо один з них утричі більший за інший.

8. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 55 мм, а кут при вершині – 50°.

4 **9**. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 2 см завдовжки, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр трикутника.

Додаткові вправи

10. З точки A, що лежить поза колом, проведено до нього дві дотичні AB і AC, де B і C – точки дотику, $\angle BAC = 60°$. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки A до центра кола дорівнює 8 см.

11. Не користуючись транспортиром, побудуйте кут, що дорівнює 120°.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 21

1 **794**. Накресліть коло. Проведіть у ньому радіус, діаметр і хорду.

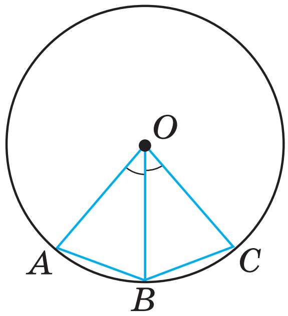
2 **795**. Дано коло із центром у точці O. Скільки спільних точок має коло з:

1) променем OK;

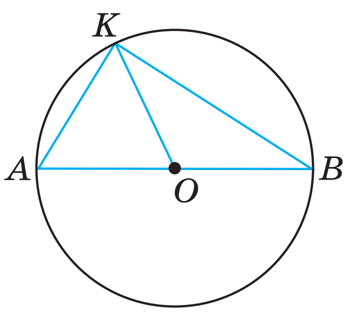
2) прямою OK?

796. У колі із центром O проведено хорди AB і BC (мал. 1). Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC$. Доведіть, що $AB = BC$.

3 **797**. У колі із центром O проведено діаметр AB і хорди AK і KB (мал. 2). Знайдіть кути трикутника AKB, якщо $\angle KOB = 130°$.



Мал. 1



Мал. 2

798. Усі радіуси кола продовжили зовні кола на їхню довжину. Яку лінію утворять їхні кінці?

799. Розділіть хорду навпіл за допомогою лише косинця, якщо дано центр кола.

800. Знайдіть градусну міру кута між двома хордами, що виходять з однієї точки і дорівнюють радіусу.

4 **801**. AB – діаметр кола, K – деяка точка кола. Знайдіть кути трикутника ABK, якщо найменший його кут у 4 рази менший від середнього за градусною мірою кута.

802. У колі через середину радіуса OA перпендикулярно до нього проведено хорду MN. Знайдіть кути трикутника MON.

* **803**. Хорда перетинає діаметр під кутом $30°$ і ділить його на два відрізки 7 см і 1 см завдовжки. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.

До § 22

2 **804**. Накресліть коло, радіус якого 2,5 см. Позначте на ньому точку L. Проведіть за допомогою косинця січну LK та дотичну LM до кола.

805. Нехай OK – відстань від центра кола O до прямої p, а r – радіус кола. Яким є взаємне розміщення прямої і кола, якщо:

1) $OK = 12$ см, $r = 14$ см;
2) $r = 7$ см, $OK = 70$ мм;
3) $OK = 2$ дм, $r = 18$ см;
4) $r = 32$ мм, $OK = 0,3$ дм?

3 **806**. Чи перетинаються дотичні до кола, що проходять через кінці його діаметра?

807. Пряма в точці A дотикається до кола із центром O. На дотичній з різних боків від точки A відкладено рівні відрізки AM і AN. Доведіть, що $OM = ON$.

4 **808**. Радіус кола ділить навпіл хорду, яка не є діаметром. Доведіть, що дотична, проведена через кінець даного радіуса, паралельна даній хорді.

До § 23

2 **809**. Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля та лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

3 **810**. Накресліть кут 80°. За допомогою циркуля, косинця, транспортира та лінійки з поділками впишіть у цей кут коло так, щоб точка дотику до сторін кута містилася на відстані 2 см від його вершини.

4 **811**. Центр кола, вписаного у трикутник, лежить на перетині двох медіан трикутника. Доведіть, що трикутник рівносторонній.

812. Вписане в рівнобедрений трикутник коло ділить бічну сторону у відношенні 2 : 3, починаючи від основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 70 см.

До § 24

2 **813**. Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

3 **814**. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику центр описаного кола належить прямій, що містить висоту трикутника, проведену до основи.

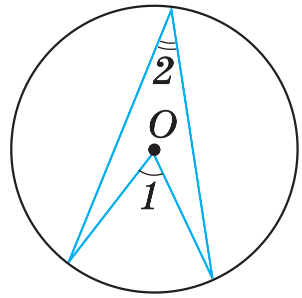
4 **815**. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, збігається із центром кола, вписаного в цей трикутник.

До § 25

816. На малюнку 3 точка O – центр кола.

1) $\angle 1 = 40^\circ$. Знайдіть $\angle 2$.

2) $\angle 2 = 25^\circ$. Знайдіть $\angle 1$.



Мал. 3

817. На малюнку 3 точка O – центр кола. Знайдіть $\angle 2$, якщо:

1) $\angle 1 - \angle 2 = 15^\circ$;

2) $\angle 1 + \angle 2 = 54^\circ$.

818. Гострокутний трикутник ABC вписано в коло із центром у точці O. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle A = \alpha$.

819. У коло радіуса 2 см вписано кут ABC, що дорівнює 30°. Знайдіть довжину хорди AC.

820. Продовження бісектриси кута A трикутника ABC перетинає коло, описане навколо трикутника, у точці K. Доведіть, що $\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{CK}$.

821. Коло поділено чотирма точками на частини, які відносяться як 1 : 2 : 3 : 4, і точки поділу сполучено між собою відрізками. Визначте кути утвореного чотирикутника.

822. Знайдіть геометричне місце точок, з яких даний відрізок MN видно під заданим кутом α.

До § 26

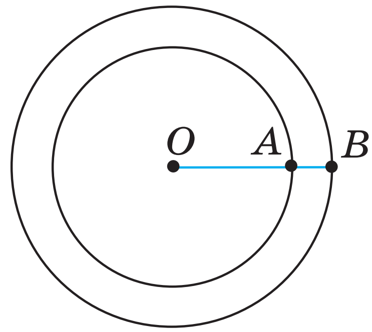
823. Накресліть відрізок 4 см завдовжки. Побудуйте два кола, центрами яких є кінці заданого відрізка, такі, що:

1) не перетинаються;

2) перетинаються.

824. Діаметр більшого з концентричних кіл ділиться меншим колом на три частини, що дорівнюють 3 см, 8 см і 3 см. Знайдіть радіуси кіл.

825. На малюнку зображено концентричні кола, радіуси яких відносяться як 10 : 7. Знайдіть ці радіуси, якщо $AB = 12$ см.



4 **826.** За якого розміщення двох кіл до них можна провести лише три спільні дотичні?

827. Відстань між центрами двох кіл, що дотикаються, дорівнює 16 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як 5 : 3. Розгляньте всі можливі випадки.

До § 27

1 **828.** Накресліть довільний кут *A* і побудуйте коло із центром у його вершині, радіус якого дорівнює відрізку, зображеному на малюнку. Чи перетинає коло кожну зі сторін кута?

829. Побудуйте відрізок, довжина якого вдвічі більша за довжину відрізка на малюнку.

2 **830.** Накресліть за допомогою транспортира кут, градусна міра якого дорівнює 80°. Побудуйте (без транспортира) кут, що дорівнює заданому, і його бісектрису.

831. Накресліть довільний трикутник і проведіть його бісектриси.

832. Накресліть гострокутний трикутник та проведіть його медіани. Упевніться в тому, що медіани перетнулися в одній точці.

833. Накресліть довільний тупий кут. Побудуйте кут, що дорівнює:

1) $\frac{1}{4}$ від накресленого кута; 2) $\frac{3}{4}$ від накресленого кута.

3 **834**. За двома даними кутами трикутника побудуйте кут, що дорівнює його третьому куту.

835. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за його гіпотенузою.

836. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом.

4 **837**. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою *a* та радіусом описаного кола *R* ($a < 2R$). Скільки розв'язків має задача?

838. Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом, що лежить проти меншої з них.

* **839**. Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом між бічними сторонами і бісектрисою, проведеною з вершини кута при основі.

840. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою другого катета і гіпотенузи.

Головне в розділі 4

✓ ***Коло*** – геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки.

✓ ***Хорда*** – відрізок, що сполучає дві точки кола.

✓ ***Діаметр*** – хорда, що проходить через центр кола.

✓ ***Круг*** – коло разом з його внутрішньою областю.

✓ ***Центр***, ***радіус***, ***діаметр***, ***хорда круга*** – відповідно центр, радіус, діаметр, хорда кола, яке є межею даного круга.

ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОЛА

Діаметр є найбільшою з хорд.

Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.

Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

ДОТИЧНА ДО КОЛА

✓ ***Дотична*** до кола – пряма, яка має з колом лише одну спільну точку (це ***точка дотику***).

ВЛАСТИВІСТЬ ДОТИЧНОЇ

Дотична до кола є перпендикулярною до радіуса, який проведений в точку дотику.

Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.

ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ КУТА

Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.

✓ ***Коло, вписане у трикутник,*** – коло, яке дотикається до всіх сторін цього трикутника.

У будь-який трикутник можна вписати коло.

Центр кола, вписаного у трикутник, – точка перетину бісектрис цього трикутника.

✓ ***Серединний перпендикуляр до відрізка*** – пряма, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього.

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 119 09.07.2024 12:51:58

ВЛАСТИВІСТЬ СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА ДО ВІДРІЗКА

Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.

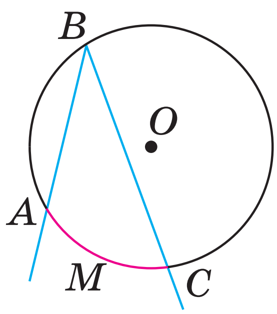
✓ ***Коло, описане навколо трикутника,*** – коло, яке проходить через усі вершини цього трикутника.

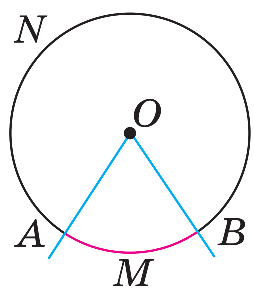
Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

ВПИСАНІ ТА ЦЕНТРАЛЬНІ КУТИ

Центральний кут – це кут з вершиною в центрі кола.





Градусна міра дуги кола – це градусна міра відповідного центрального кута.

Вписаний кут – це кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.

Т е о р е м а (про вписаний кут). **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

Н а с л і д о к 1. **Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, між собою рівні.**

Н а с л і д о к 2. **Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий.**

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

1

1. Проведіть пряму m, позначте точку A, що належить прямій m, і точку B, що прямій m не належить. Виконайте відповідні записи.

2. Накресліть довільний відрізок MN та коло із центром у точці M, радіус якого дорівнює MN.

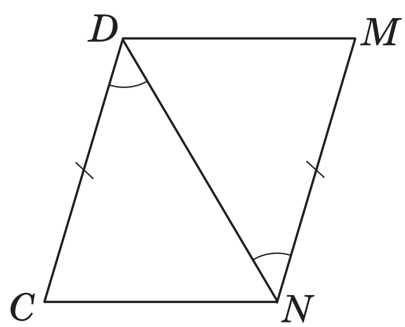
3. У трикутнику CDE кут C – прямий. Як називають сторону DE цього трикутника? Як називають сторони CD і CE цього трикутника?

2

4. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює $119°$. Знайдіть решту кутів. Знайдіть градусну міру кута між цими прямими.

5. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона – 9 см. Знайдіть основу трикутника.

6. Дано: $DC = MN$, $\angle CDN = \angle DNM$ (див. мал.).
Довести: $\triangle CDN = \triangle MND$.



3

7. Один з кутів трикутника дорівнює $68°$, а другий – на $14°$ більший за третій. Знайдіть невідомі кути трикутника.

8. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см, $\angle A = 50°$.

4

9. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо зовнішні кути при вершинах цих кутів відносяться як $29 : 25$.

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 121 09.07.2024 12:51:59

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ 1

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

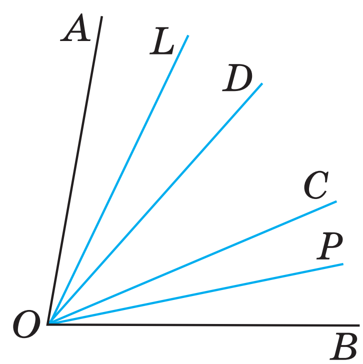
1. Дано відрізок AB. Позначте всі такі точки K на відрізку AB, для яких виконується співвідношення:
1) $BK = 3AK$;
2) $BK \geqslant 3AK$.

2. $\angle AOB = 120°$. Побудуйте промінь OK, який проходить між сторонами даного кута так, що $3\angle AOK - 2\angle KOB = 10°$.

3. Скільки різних прямих можна провести через чотири точки так, щоб кожна пряма проходила щонайменше через дві із заданих точок? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

4. Скільки різних точок перетину можуть мати чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного виконайте малюнок.

5. Точки A, B і C належать прямій a, причому точка B лежить між точками A і C. Відомо, що $AC < 1{,}9AB$. Порівняйте довжини відрізків BC і AB.



6. На малюнку: $\angle AOC = \angle BOD$. OL і OP – бісектриси кутів AOD і COB. Порівняйте кути:
1) AOL і COP; 2) LOP і AOC.

Розділ 2

Взаємне розміщення прямих на площині

7. Дано п'ять прямих, кожні дві з яких перетинаються. Відомо, що через точку перетину будь-яких двох з них проходить принаймні ще одна з даних прямих. Доведіть, що всі ці прямі проходять через одну точку.

8. Чи можна градусні міри двох суміжних кутів записати:
1) тільки непарними цифрами;
2) тільки парними цифрами?

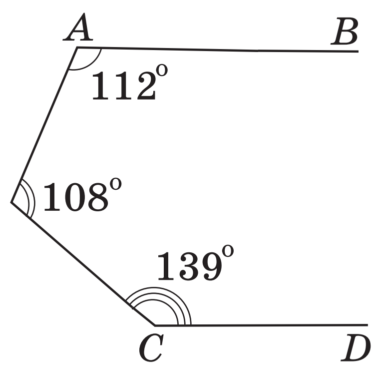
9. Знайдіть суміжні кути, якщо:
1) градусні міри цих кутів відносяться як $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$;
2) половина одного з них становить 40 % від іншого.

10. У якому з випадків утвориться більше пар вертикальних кутів: при перетині трьох прямих в одній точці чи в трьох точках?

11. Знайдіть кут між двома прямими, що перетинаються, якщо сума $\frac{1}{3}$ одного з утворених кутів і $\frac{5}{6}$ іншого дорівнює $90°$.

12. Через вершину тупого кута, градусна міра якого дорівнює α, проведено промені, перпендикулярні до сторін кута. Промені утворили гострий кут β. Доведіть, що $\alpha + \beta = 180°$.

13. Чи є паралельними прямі *AB* і *CD* на малюнку?



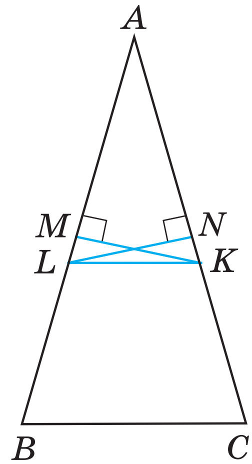
14. Чи можна, використовуючи шаблон кута, градусна міра якого 27°, побудувати перпендикулярні прямі?

15. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо один з них у 2,6 раза менший від суми трьох інших.

Розділ 3

Трикутники. Ознаки рівності трикутників

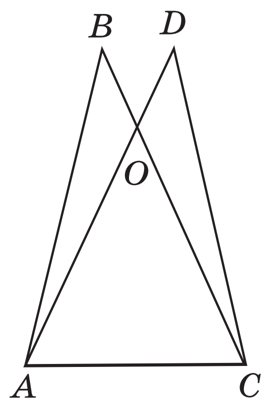
16. Периметр трикутника на 10 см більший за одну зі сторін, на 13 см – за другу і на 9 см – за третю. Знайдіть периметр трикутника.



17. Точки M і N – середини сторін AB і AC трикутника ABC, $AB = AC$, $MK \perp AB$, $NL \perp AC$ (див. мал.). Доведіть, що $\angle NLK = \angle MKL$.

18. Прямі, що містять бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C трикутника ABC, перетинаються в точці O. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle A = \alpha$.

19. $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB. Медіани AA_1 і BB_1 продовжено за точки A_1 і B_1 на відрізки A_1K і B_1L відповідно так, що $A_1K = AA_1$ і $B_1L = BB_1$. Доведіть, що $\angle ALC = \angle BKC$.



20. На малюнку: $\triangle ABC = \triangle CDA$, $AB = CD = 40$ см, $BO = DO = 10$ см. Периметр трикутника ABC дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника AOC, якщо AO більша за AC на 30 см.

21. Доведіть, що з точки перетину бісектрис кожну зі сторін трикутника видно під тупим кутом.

22. Дві сторони і висота, що проведена до третьої сторони одного трикутника, відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті, що проведена до третьої сторони другого трикутника. Чи можна стверджувати, що трикутники рівні між собою?

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 124 09.07.2024 12:52:01

23. Дві сторони і медіана, що проведена до третьої сторони одного трикутника, дорівнюють відповідно двом сторонам і медіані, проведеній до третьої сторони другого трикутника. Доведіть, що ці трикутники рівні між собою.

24. Визначте вид трикутника (за кутами), якщо:
1) сума будь-яких двох його кутів більша за 90°;
2) кожний з кутів менший від суми двох інших.

25. У трикутнику *ABC* кут *C* – прямий. Сторону *AB* трикутника продовжено за точку *A* на відрізок $AP = AC$ і за точку *B* на відрізок $BT = BC$. Знайдіть суму градусних мір кутів *CPT* і *CTP*.

26. У трикутнику *ABC* $AC = BC$, *D* – точка перетину бісектрис трикутника, а точка *O* – центр кола, описаного навколо трикутника. Відрізок *OD* перетинає сторону *AB* трикутника в точці *P* і ділиться цією точкою навпіл. Знайдіть кути трикутника *ABC*.

27. Відрізки *AC* і *BD* перетинаються. Відомо, що $AB > AC$. Доведіть, що $BD > CD$.

28. У трикутнику *ABC* $AB > AC$, *AM* – медіана. Доведіть, що $\angle CAM > \angle MAB$.

29. Усередині рівностороннього трикутника *ABC* узято довільну точку *K*. Доведіть, що $AK < BK + KC$.

30. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів удвічі менший від другого, а сума гіпотенузи та меншого катета дорівнює *a* см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

31. У трикутнику *ABC* $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах *AB* і *BC* позначено точки *K* і *L* так, що $\angle LAK = 5°$, $\angle LCK = 10°$. Знайдіть $\angle LKC$.

32. У трикутнику *ABC* висоти AA_1 і BB_1 рівні й $AB_1 = CA_1$. Знайдіть $\angle C$.

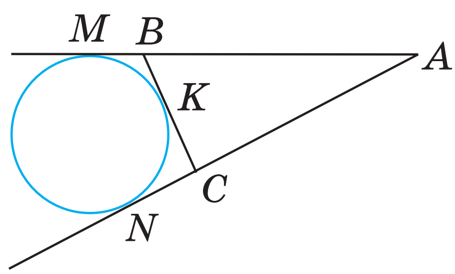
Розділ 4

Коло і круг

33. Відрізок BD – висота гострокутного трикутника ABC. Від вершини B на прямій BC відкладено відрізки BM і BN завдовжки, як сторона AB. На стороні AC від точки D відкладено відрізок DL, що дорівнює DA. Доведіть, що точки A, M, N, L лежать на одному колі.

34. Навколо рівнобедреного трикутника з кутом при вершині 120° і бічною стороною, що дорівнює a см, описано коло. Знайдіть його радіус.

35. AM і AN – дотичні до кола (див. мал.), $AM = m$ см. Пряма BC дотикається до кола в точці K. Знайдіть периметр трикутника ABC.



36. Два кола однакового радіуса, що дотикаються між собою, внутрішньо дотикаються до третього кола. Сполучивши центри трьох кіл, отримали трикутник, периметр якого 20 см. Знайдіть радіус більшого кола.

37. Нехай r – радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c. Доведіть, що $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

38. Два кола мають зовнішній дотик у точці P. Точки M_1 і M_2 – точки дотику спільної зовнішньої дотичної до кіл. Доведіть, що $\angle M_1PM_2 = 90°$.

39. За допомогою циркуля і лінійки поділіть кут 54° на три рівні частини.

40. Знаючи суму і різницю двох кутів, побудуйте їх.

41. Побудуйте $\triangle ABC$ за стороною BC, прилеглим до неї кутом B і сумою двох інших сторін $CA + AB$.

42. Побудуйте $\triangle ABC$ за двома кутами A і B та периметром P.

43. Дано пряму a і відрізок AB, що перетинає цю пряму. Побудуйте на прямій a точку C так, щоб пряма містила бісектрису трикутника ABC.

44. Побудуйте точку, яка лежить на даному колі й рівновіддалена від кінців даного відрізка. Скільки розв'язків має задача?

ДОДАТКОВІ ТЕМИ

Геометричне місце точок

Поняття про геометричне місце точок площини

У геометрії є задачі, пов'язані з геометричним місцем точок, яке, залежно від умови задачі, потрібно або знайти (побудувати), або використати для розв'язування задачі.

Геометричним місцем точок **площини називають фігуру, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.**

Приклади геометричних місць точок площини

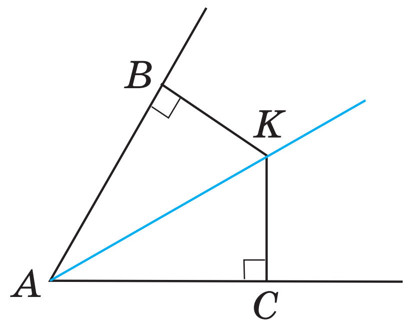
Розглянемо кілька геометричних місць точок площини.

1. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки на дану відстань*, – коло, радіус якого дорівнює даній відстані.

2. *Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не перевищує даної відстані*, – круг, радіус якого дорівнює даній відстані.

3. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області*, – бісектриса даного кута.

Доведення. 1) Нехай точка K рівновіддалена від сторін AB і AC кута A і належить внутрішній області кута (мал. 1). Тобто перпендикуляри KB і KC, проведені із цієї точки до сторін кута, – рівні між собою. Тоді $\triangle ABK = \triangle ACK$ (за катетом і гіпотенузою), а $\angle BAK = \angle CAK$ (як відповідні кути). Отже, AK – бісектриса кута.



Мал. 1

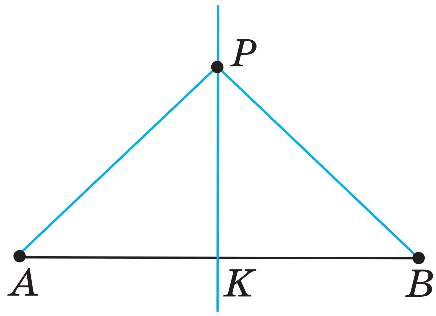
2) Нехай точка K належить бісектрисі кута. За властивістю бісектриси кута (див. § 23, теорема 1): $KB = KC$. ■

Отже, ми довели, що геометричним місцем точок, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області, є бісектриса даного кута.

4. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від кінців відрізка*, – це серединний перпендикуляр до даного відрізка.

Доведення. 1) Нехай точка P рівновіддалена від кінців відрізка AB, тобто $PA = PB$ (мал. 2). Тоді $\triangle ABP$ – рівнобедрений з основою AB, а тому медіана PK цього трикутника є його висотою. Отже, $AK = KB$ і $PK \perp AB$. Тому PK – серединний перпендикуляр до відрізка AB.

2) Нехай точка P належить серединному перпендикуляру до відрізка AB. За властивістю серединного перпендикуляра (див. § 24, теорема 1): $PA = PB$. ■



Мал. 2

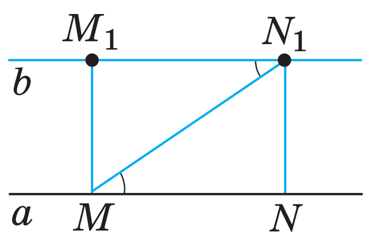
Отже, ми довели, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до даного відрізка.

5. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від даної прямої на задану відстань*, – це дві прямі, паралельні даній прямій, кожна точка яких міститься на заданій відстані від прямої.

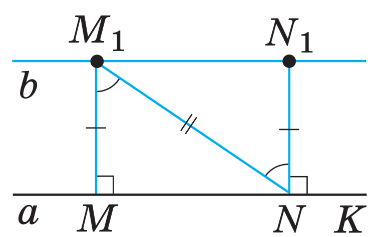
Доведення. 1) Доведемо, що коли пряма b паралельна прямій a, то дві довільні точки прямої b рівновіддалені від прямої a.

Нехай M_1 і N_1 – довільні точки прямої b. Проведемо перпендикуляри M_1M і N_1N до прямої a (мал. 3). $\angle M_1MN = \angle N_1NM = 90°$. Оскільки $a \parallel b$, то $\angle MM_1N_1 = \angle NN_1M_1 = 90°$. Проведемо січну MN_1. Тоді $\angle N_1MN = \angle M_1N_1M$ (як внутрішні різносторонні). Тому $\triangle MM_1N_1 = \triangle N_1NM$ (за гіпотенузою і гострим кутом), звідки $M_1M = N_1N$, тобто точки M_1 і N_1 прямої b рівновіддалені від прямої a.

2) Доведемо, що коли дві довільні точки M_1 і N_1 прямої b лежать на однаковій відстані від прямої a і по один бік від неї, то пряма b – паралельна прямій a (мал. 4).



Мал. 3



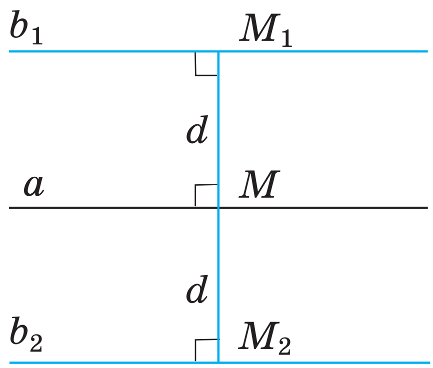
Мал. 4

Нехай M_1M і N_1N – перпендикуляри до прямої a. За умовою $M_1M = N_1N$.

Оскільки $\angle M_1MN = \angle N_1NK$, то $MM_1 \parallel NN_1$. Тому $\angle MM_1N = \angle N_1NM_1$ (як внутрішні різносторонні кути). Отже, $\triangle MM_1N = \triangle N_1NM_1$ (за першою ознакою). Тому $\angle M_1N_1N = \angle M_1MN = 90°$. Також маємо $\angle N_1NK = 90°$. Але $\angle M_1N_1N$ і $\angle N_1NK$ – внутрішні різносторонні для прямих a і b. Тому $a \parallel b$. ■

Отже, геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на задану відстань d, є дві прямі, паралельні даній, кожна точка яких міститься на заданій відстані від прямої.

На малюнку 5 $b_1 \parallel a$, $b_2 \parallel a$, $M_1M = M_2M = d$. Відстань d також називають *відстанню між паралельними прямими* (наприклад, між b_1 і a).



Мал. 5

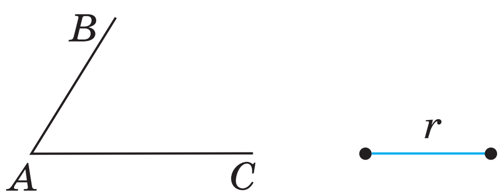
Метод геометричних місць

Суть методу геометричних місць у задачах на побудову така. Нехай потрібно побудувати точку A, що задовольняє дві умови. Будуємо геометричне місце точок, що задовольняють першу умову, – фігура F_1, і геометричне місце точок, що задовольняють другу умову, – фігура F_2. Шукана точка A належить і F_1, і F_2, а тому є точкою їх перетину.

Розв'яжемо задачу на застосування методу геометричних місць точок.

Приклад. У даний кут вписати коло заданого радіуса.

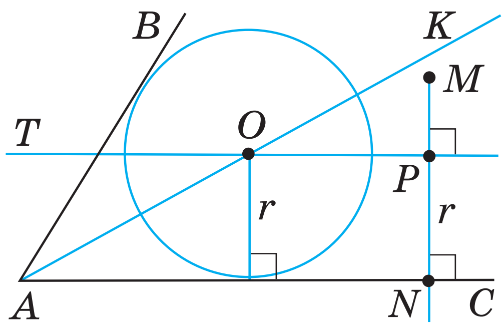
Розв'язання. Нехай дано кут A (мал. 6), у який потрібно вписати коло радіусом r (тобто таке коло радіусом r, яке дотикалося б до сторін кута).



Мал. 6

Спочатку знайдемо центр цього кола – точку O. Ця точка задовольняє дві умови: 1) належить бісектрисі кута (бо є рівновіддаленою від сторін кута); 2) міститься на відстані r, напри-

клад, від сторони *AC* кута.
Звідси побудова:
1) будуємо бісектрису кута *A* – промінь *AK* (мал. 7);



Мал. 7

2) будуємо пряму, перпендикулярну до прямої *AC*, що проходить через деяку точку *M*, яка лежить усередині кута;
3) визначаємо на побудованій прямій точку *P*, що міститься на відстані *r* від прямої *AC*;
4) проводимо через точку *P* пряму *PT*, перпендикулярну до прямої *PN*; тоді прямі *PT* і *AC* – паралельні, кожна точка прямої *PT* міститься на відстані *r* від прямої *AC*;
5) пряма *PT* перетинає промінь *AK* у точці *O*. Ця точка і є центром кола, радіус якого *r*, вписаного в кут *A*;
6) описуємо коло, радіус якого *r*, із центром у точці *O*, воно дотикається до сторін кута.
Доведення того, що побудоване коло є шуканим, випливає з побудови.

? Що називають геометричним місцем точок? • Що являє собою геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, відстань від яких до даної точки не перевищує заданої відстані; рівновіддалених від сторін кута; рівновіддалених від кінців відрізка; віддалених від даної прямої на задану відстань? • У чому полягає суть методу геометричних місць точок?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2 **1.** Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від заданої точки на:

1) відстань 2 см; 2) відстань, не більшу за 2 см.

2. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від заданої точки на:

1) відстань *a* см;

2) відстань, не більшу за *a* см.

3. Накресліть довільний відрізок *AB* і знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

4. Побудуйте відрізок *MN* завдовжки 4 см і геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

5. Побудуйте тупий кут і геометричне місце точок, що належать внутрішній області кута, рівновіддалених від сторін цього кута.

6. Побудуйте гострий кут і геометричне місце точок, що належать внутрішній області кута, рівновіддалених від сторін цього кута.

7. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на задану відстань.

8. Побудуйте прямий кут і геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута, що належать його внутрішній області.

9. Чи буде пряма, що містить висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців основи?

3 **10.** Позначте точки *P* і *F*, відстань між якими 4 см. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від кожної з них на відстань 3 см.

11. Побудуйте геометричне місце точок, що містяться від заданої прямої на відстані, що дорівнює заданому відрізку *a*.

12. Побудуйте геометричне місце точок, що містяться на відстані 4 см від заданої прямої.

13. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіусом *r*, що проходять через точку *P*.

14. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в заданій точці *M*.

15. Дано основу *AB* рівнобедреного трикутника. Знайдіть геометричне місце точок – вершин рівнобедрених трикутників з основою *AB*.

16. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через дві задані точки – *P* і *L*.

17. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від двох заданих паралельних прямих.

18. Побудуйте коло радіусом *r*, що проходить через дві дані точки. Скільки розв'язків має задача?

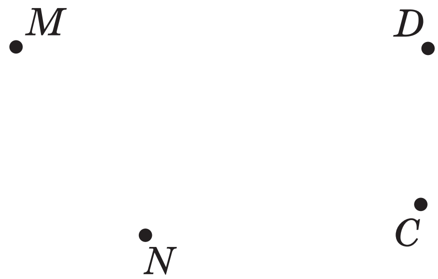
19. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх вершин трикутника.

20. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, радіус кожного з яких дорівнює *r*, що дотикаються до даної прямої.

21. На стороні трикутника знайдіть точку, рівновіддалену від двох інших його сторін.

4 **22**. Дано пряму *a* і точку *A*. Знайдіть геометричне місце точок, що віддалені від прямої *a* на 3 см, а від точки *A* – на 2 см. Скільки розв'язків може мати задача залежно від розміщення точки *A* і прямої *a*?

23. Скопіюйте малюнок 8 у зошит. Побудуйте таку точку A, щоб $AM = AN$ і $AC = AD$.

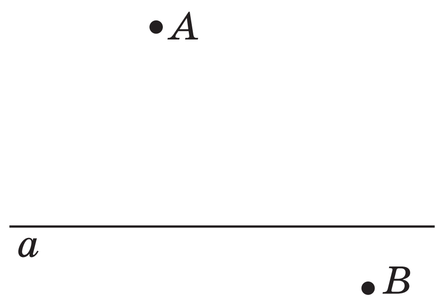


Мал. 8

24. Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається до двох даних кіл, що мають зовнішній дотик.

25. Центр кола, радіус якого дорівнює 1,5 см, належить прямій a. Побудуйте коло радіусом 2 см, що дотикається до заданих прямої і кола.

26. Два населених пункти A і B розташовані з різних боків від річки a (мал. 9). У якому місці потрібно побудувати міст через річку, щоб він був рівновіддаленим від пунктів A і B?



Мал. 9

27. Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, що проведена до однієї з них. Скільки розв'язків має задача?

28. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і висотою, що проведена до цієї сторони.

29. Знайдіть геометричне місце точок, що містяться на відстані, яка не перевищує 3 см від даної прямої.

30. Побудуйте коло, що проходить через дану точку M і дотикається до даної прямої a в даній точці A.

31. Побудуйте трикутник за його кутом, бісектрисою, проведеною із цього кута, і висотою, що проведена до прилеглої до цього кута сторони.

32. Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола, стороною та висотою, що проведена до цієї сторони.

33. Знайдіть геометричне місце вершин прямокутних трикутників зі спільною гіпотенузою.

Вправи для повторення

34. Периметр рівнобедреного трикутника на 18 см більший за його основу. Чи можливо знайти довжину бічної сторони?

35. Один із зовнішніх кутів прямокутного трикутника дорівнює 120°. Знайдіть відношення меншого катета до гіпотенузи.

36. Два кола із центрами в точках O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B, і кожне з них проходить через центр іншого. Знайдіть $\angle O_1AO_2$ і $\angle AO_1B$.

Життєва математика

37. Кімната у формі прямокутника має розміри 3,6 × 4,9 м. У кімнаті є двері 90 см завширшки.

1) Скільки метрів плінтуса потрібно купити для цієї кімнати?

2) Скільки коштуватиме ця покупка, якщо один погонний метр плінтуса коштує 50 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

38. Прямокутну плитку шоколаду розламали на 4 прямокутних шматки. Один з них містить 6 квадратних частинок, другий – 15, а третій – 16. Скільки квадратних частинок у четвертому шматку цієї плитки?

Істер_Геометрія_П_7_ч.2_[Сл3]_(029-24)_V1.indd 135 09.07.2024 12:52:05

А ще раніше...

Жінки у становленні математики у світі

Гіпатія Александрійська (бл. 350–370 – 415) – грецька жінка-астроном, філософ, математик, дочка математика Теона – останнього управителя Александрійської бібліотеки.

В історії науки Гіпатія знана як винахідниця. Вона створила пласку астролябію – прилад для визначення широт і довгот та знаходження Сонця, зірок і планет в астрономії, а також планісферу – зображення небесної сфери на площині, на якій можна обчислювати захід і схід небесних світил. Гіпатія винайшла ареометр – прилад для визначення густини рідини; обчислювала астрономічні таблиці; написала коментарі до наукових творів Аполлонія та Діофанта. Вона мала славу талановитої вченої та викладачки.

Гіпатія

Хільдегарда Бінгенська (1098–1179) – німецька ерудитка, мисткиня, драматургиня, лінгвістка, філософиня, лікарка, поетеса, політична консультантка, композиторка (перша, чия біографія відома) – створила одну з перших штучних мов – *Lingua Ignota*.

Марія Ґаетана Аньєзі (1718–1799) – італійська вчена, математик та філософ, жінка енциклопедичних знань. Їй приписують авторство першої книги про диференціальне та інтегральне числення. Вона перша жінка, яка стала професоркою математики Болонського університету. Першу свою роботу «Філософські міркування» Марія опублікувала уже в 20-річному віці. А в 30 років надрукувала «Основи аналізу». Цю книгу Марія Аньєзі писала майже 10 років як підручник для своїх молодших братів і сестер. Ця праця перекладалась на різні мови і користувалася популярністю аж до XIX ст.

Марія Ґаетана Аньєзі

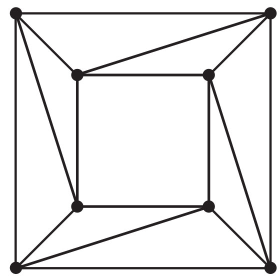
ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

§ 16. 413. $\angle KAC = 56°$; $\angle BAK = 70°$.

§ 17. 433. 30°. **434.** 35°. **435.** $\angle L = 60°$; $\angle N = 40°$; $\angle M = 80°$. **436.** $\angle C = 80°$; $\angle B = 50°$; $\angle A = 50°$. **439.** $\angle A = 45°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 75°$. **440.** 36°; 54°; 90°. **441.** 50°; 65°; 65°. **442.** 52°; 52°; 76°. **445.** Корольов. **446.** 48°; 96°. **449.** 55°. **450.** 30°. **451.** 1) 12°; 12°; 156° або 12°; 84°; 84°; 2) 92°; 44°; 44°. **452.** 1) 28°; 28°; 124° або 28°; 76°; 76°; 2) 106°; 37°; 37°. **454.** 36°; 72°; 72° або 45°; 45°; 90°. **455.** 55°; 55°; 70° або 65°; 65°; 50°. **456.** 5 см. **459.** 20° або 100°.

§ 18. 480. Прапор. **481.** 1) 50°; 70°; 2) 30°; 90°. **482.** 62°; 62° і 56° або 62°; 59°; 59°. **483.** 138°; 21°; 21°. **485.** 3 : 1 : 2. **486.** 17 : 16 : 15. **488.** 30° і 60°. **489.** 4,2 см; 8,4 см; 10,2 см.

§ 19. 508. Костенко. **509.** 1) 18° і 72°; 2) 37° і 53°; 3) 50° і 40°. **510.** 71°. **511.** 113°. **513.** 58° і 32°. **514.** 40° і 50°. **516.** 20 см; 10 см. **517.** 6 см. **518.** 35° і 55°. **519.** 72° і 18°. **521.** 32°; 52° і 96°. **522.** 24 см. **525.** Див. мал. 1.



Мал. 1

§ 20. 532. Ні. **533.** 27 см. **534.** 5,7 см або 6,7 см. **535.** 1) Так; 2), 3) ні. **536.** 1), 2) Ні; 3) так. **537.** Ні. **538.** Ні. **539.** $\angle A = 39°$; $\angle B = 117°$; $\angle C = 24°$. **543.** 1) Так; 2) ні.

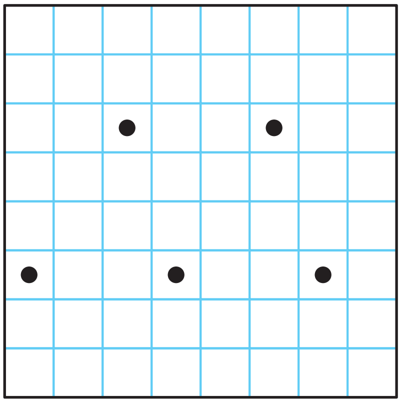
Вправи для повторення розділу 3

547. 10 см; 20 см; 16 см. **548.** $AB = 5$ см; $BC = 8$ см; $AC = 7$ см. **551.** Ні. **552.** 18 см. **563.** Так. **564.** 24 см; 32 см; 32 см. **572.** $AC = b - a$, $P = a + b$. **579.** 35°. **580.** 48°; 72°. **581.** 60°. **582.** 82°; 48°. **583.** 1) 30°; 2) 70°. **584.** 1) 80°; 2) 32°. **587.** 1) Так; 2), 3) ні. **588.** 108°. **590.** 40°; 56°; 84°. **591.** 100°; 40°; 40°. **597.** 27°; 63°. **598.** 30° і 60°. **599.** 10 см. **600.** 45°. **601.** 16 см. **602.** $2a$ см. **603.** 20 см; 10 см. **606.** 4 см і 13 см. **607.** Ні. **608.** 1) 4 см або 7 см; 2) 5 см; 3) 12 см. **609.** 9 см; 21 см; 21 см.

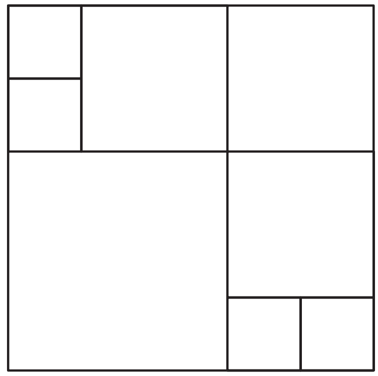
Розділ 4

§ 21. 626. 16°. **627.** 36°. **628.** 1) Безліч; 2) дві. **629.** 10 см. **630.** 9 см. **633.** 2 см і 3,5 см. **635.** 135°. **638.** 16.

§ 22. 649. 41°. **650.** 106°. **651.** 60°. **652.** 7 см. **654.** 12 см. **656.** Див. мал. 2.



Мал. 2



Мал. 3

§ 23. 668. $AP = AF = 7$ см; $BP = BM = 1$ см; $CM = CF = 5$ см. **669.** 10 см; 12 см; 14 см. **670.** 20 см. **671.** 38 см. **673.** 9°. **675.** Не обов'язково, див. мал. 3.

§ 24. 681. 1), 2) Безліч; 3) одне. **695.** 8 см.

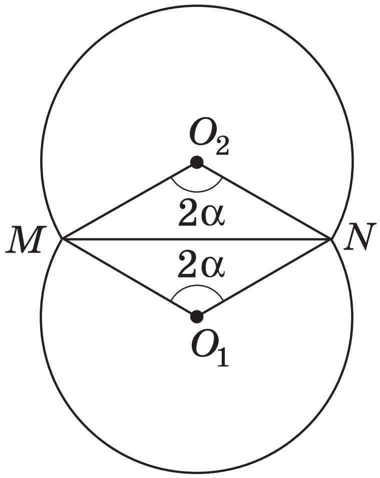
§ 25. 702. 108°. **703.** 116°. **704.** 120°; 60°. **705.** 30°. **706.** 80°. **708.** 40°. **710.** 40°, 70°, 70°, або 40°, 40°, 100°, або 140°, 20°, 20°. **711.** 50°, 65°, 65°, або 50°, 50°, 80°, або 130°, 25°, 25°. **712.** 20°, 40°, 120°. **713.** 10 см. **715.** 11,52 м. **718.** Так.

§ 26. 726. 8 дм і 20 дм. **727.** 6 см і 9 см. **728.** 1) Зовнішній дотик кіл; 2) кола не перетинаються; 3) внутрішній дотик кіл; 4) кола перетинаються. **729.** 1) Кола не перетинаються; 2) внутрішній дотик кіл; 3) кола перетинаються; 4) зовнішній дотик кіл. **732.** 2 см; 3 см; 5 см. **733.** 40 см. **737.** 17.

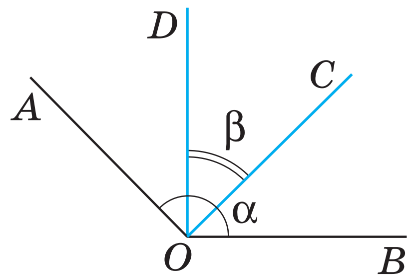
§ 27. 773. *Порада*. Знайдіть кут при основі трикутника. Для цього побудуйте даний кут, суміжний з ним, і поділіть останній навпіл. **774.** Див. пораду до задачі 773. **783.** *Порада*. Побудуйте прямокутний трикутник, у якого один з катетів удвічі менший від гіпотенузи. **789.** 92°. **791.** 15 см і 45 см.

Вправи для повторення розділу 4

797. $\angle AKB = 90°$; $\angle KBA = 25°$; $\angle KAB = 65°$. **800.** 120°. **801.** 18°; 72°; 90°. **802.** 30°; 30°; 120°. **803.** 1,5 см. **806.** Ні. **812.** 20 см; 25 см; 25 см. **819.** 2 см. **821.** 90°; 54°; 90°; 126°. **822.** *Порада*. Шукане геометричне місце точок – дві дуги кіл із центрами O_1 і O_2, з яких MN видно під кутом 2α (див. мал. 4). **824.** 4 см; 7 см. **825.** 40 см; 28 см. **826.** Зовнішній дотик двох кіл. **827.** 10 см і 6 см або 40 см і 24 см.



Мал. 4



Мал. 5

Задачі підвищеної складності

2. *Порада*. $\angle AOK = 50°$. **5.** $BC < AB$. **6.** 1) $\angle AOL = \angle COP$; 2) $\angle LOP = \angle AOC$. **8.** 1) Так, наприклад, 1° і 179°; 2) ні. **9.** 1) 108° і 72°; 2) 80° і 100°. **10.** Однаково, по 6. **11.** 60° або $\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$. **12.** *Розв'язання*. Нехай дано тупий $\angle AOB = \alpha$ (див. мал. 5). $OA \perp OC$, $OB \perp OD$, $\angle COD$ – гострий, $\angle COD = \beta$.

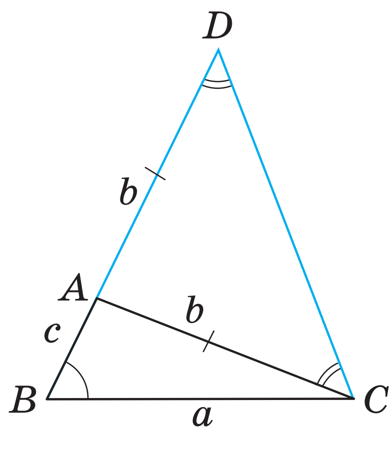
1) $\angle AOD = \angle AOC - \angle DOC$; $\angle AOD = 90° - \beta$.

2) $\angle BOC = \angle DOB - \angle DOC$; $\angle BOC = 90° - \beta$.

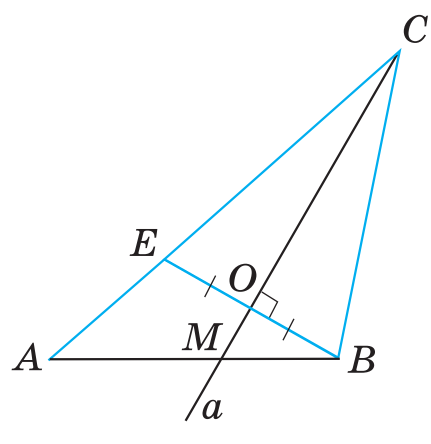
3) $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOC + \angle COB$.

Тоді $\alpha = 90° - \beta + \beta + 90° - \beta$, звідки $\alpha + \beta = 180°$, що й потрібно було довести. **13.** Ні. **14.** Так. **15.** 80°; 100°; 80°; 100°. **16.** 16 см. *Розв'язання*. Нехай a см, b см, c см – сторони трикутника, а P см – його периметр. $P = a + b + c$. За умовою $P - a = 10$, $P - b = 13$, $P - c = 9$. Маємо $a + b + c - a = 10$, тобто $b + c = 10$. Аналогічно $a + c = 13$, $a + b = 9$.

Маємо систему: $\begin{cases} b + c = 10, \\ a + c = 13, \\ a + b = 9. \end{cases}$ Склавши почленно всі три рівняння, одержимо: $2a + 2b + 2c = 32$; $2(a + b + c) = 32$; $a + b + c = 16$. Отже, периметр трикутника дорівнює 16 см. **18.** $90 - \frac{\alpha}{2}$. **20.** 90 см. *Розв'язання*. 1) Оскільки $\triangle ABC = \triangle CDA$, то $BC = AD$. 2) $CO = BC - BO$, $AO = AD - DO$. Але $BC = AD$, $BO = DO$, тому $AO = OC$. 3) Позначимо $AO = OC = x$ см, тоді $AC = (x - 30)$ см. 4) Периметр $P_{\triangle ABC} = 100$ см. Маємо: $AB + BC + CA = 100$, $AB + BO + OC + CA = 100$, $40 + 10 + x + x - 30 = 100$. Звідки $x = 40$ (см). 5) $P_{\triangle AOC} = x + x + x - 30 = 3x - 30 = 3 \cdot 40 - 30 = 90$ (см). **24.** 1) Гострокутний; 2) гострокутний. **25.** 45°. **26.** 36°, 36°, 108°. **29.** *Порада*. Розгляньте трикутники *AKC* і *BKC*. **30.** $\frac{a}{3}$ см. **31.** 85°. **32.** $\angle C = 60°$. *Порада*. $\triangle ACA_1 = \triangle BAB_1$ (за двома катетами). **33.** *Порада*. Розгляньте коло із центром у точці *B*, радіус якого *BA*. **34.** *a* см. **35.** $2m$ см. *Розв'язання*. За властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо $AN = AM = m$ см, $BM = BK$ і $CK = CN$. Нехай *P* см – периметр трикутника *ABC*. Тоді $P = AB + BC + CA = AB + BK + KC + CA = AB + BM + CN + CA = (AB + BM) + (AC + CN) = AM + AN = m + m = 2m$ (см). **36.** 10 см. **39.** *Порада*. Оскільки $54° \cdot 3 = 162°$, то можна побудувати кут 18° (18° = 180° – 162°). **41.** *Порада*. Побудуйте $\triangle BCD$, у якого $\angle DBC = \angle B$, $BD = AB + AC$ (мал. 6). Тоді точка *A* визначається з умови $\angle ADC = \angle ACD$. **42.** *Порада*. Слід розглянути $\triangle CMN$, у якого $MN = P$, $\angle M = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle N = \frac{1}{2}\angle B$. **43.** *Порада*. Нехай пряма *a* перетинає *AB* у точці *M*. Побудуйте відрізок $BE \perp a$, $BO = OE$ (мал. 7). Шукана точка *C* є точкою перетину прямих *a* і *AE*. **44.** Жодного, один або два розв'язки.



Мал. 6



Мал. 7

Додаткові теми

23. *Порада*. Шукана точка – точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків MN і CD. **24.** *Порада*. Нехай дано кола із центрами O_1 і O_2, радіуси яких r_1 і r_2, а потрібно побудувати коло радіуса r, що дотикається до даних. Побудуйте кола із центрами в точках O_1 і O_2, радіуси яких $r_1 + r$ та $r_2 + r$ відповідно. **26.** *Порада*. Шукана точка – точка перетину серединного перпендикуляра до AB та прямої a. **33.** Коло, діаметром якого є гіпотенуза трикутника без точок, що є кінцями гіпотенузи. **34.** Так, вона дорівнює 9 см. **35.** 1 : 2. **36.** $\angle O_1AO_2 = 60°$; $\angle AO_1B = 120°$. **38.** 40.

Відповіді до завдань у тестовій формі «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	Б	Б	Б	Г	В	В	Г	А	А	Г	Г	Б	1–А; 2–В; 3–Б
4	В	А	В	Б	Г	Г	Б	Г	А	Б	А	В	1–Б; 2–Г; 3–В
5	Б	В	Г	А	Б	Б	А	Б	В	В	А	В	1–В; 2–А; 3–Г

Відеоуроки автора за темами підручника можна переглянути за посиланням https://cutt.ly/jw8Dhib3 або *QR*-кодом.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для осіб
з особливими освітніми потребами
(Н 54.1–Н 54.2)
7 клас
(у 2 частинах)

ЧАСТИНА 2

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей».

Редактор *Олена Мовчан*
Обкладинка *Олени Мамаєвої*
Макет, художнє оформлення, комп’ютерна
обробка ілюстрацій *Василя Марущинця*
Комп’ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректор *Інна Борік*

Формат 84×108/16. Ум. друк. арк. __,__. Обл.-вид. арк. __,__.
Тираж __________ пр. Вид. № _____. Зам. № ____________.

ТОВ «Генеза», вул. Генерала Алмазова, б. 18/7 (літ. В), офіс 404, м. Київ, 01133, Україна.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано

.